Prove d'esame a.a. 2008–2009

Andrea Corli*

1 settembre 2011

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2008–09, relativi al Corso di Analisi Matematica I (trimestrale, 6 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

22/10/2008 - Prima prova parziale

1. Calcolare i limiti: $\lim_{n\to\infty} e^n(\sqrt{e^{2n}+1}-\sqrt{e^{2n}-1})$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{3}}$.
2. Studiare la convergenza delle serie $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\log n}-\frac{1}{\log(n+1)}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(2n)!}$.
3. Calcolare i seguenti limiti e verificare il risultato tramite la definizione: $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}$, $\lim_{n\to\infty} n(1-n^2)$.
4. Calcolare il dominio delle funzioni: $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{3}\right)$, $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x}$.
5. Se una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, è vero o falso che la successione $\{a_n\}$ deve essere decrescente?
6. Dire se la funzione $f(x)=2e^{3x+1}$ è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa. Specificare in caso dominio e immagine di entrambe e disegnarne i grafici.
7. Esistono funzioni pari non costanti e monotòne?
8. Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni, e specificare se sono pari, dispari o nessuna delle due: 4^x-2^x, $\mathrm{arctg}\,|x|$, $-\mathrm{tg}(4x)$.

22/10/2008 - Prima prova parziale

1. Studiare la convergenza delle serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{1}{n}\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^{2n}}$.
2. Esistono serie indeterminate che convergono assolutamente?
3. Calcolare il dominio delle funzioni: $\frac{\log(x^2-3x)}{x-1}$, $\arccos\left(\frac{1-x^2}{2}\right)$.
4. Dire se la funzione $f(x)=3\log(2x-1)$ è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa. Specificare in caso dominio e immagine di entrambe e disegnarne i grafici.
5. Calcolare i seguenti limiti e verificare il risultato tramite la definizione: $\lim_{n\to\infty}\log(1+2^{-n})$, $\lim_{n\to\infty} n(n^2+1)$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

6. Esistono funzioni dispari non costanti e positive?
7. Calcolare i limiti: $\lim_{n\to\infty} n(\log(n+1)-\log n)$, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{n^3+2n}-\sqrt{n^3-2n}\right)$.
8. Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni, e specificare se sono pari, dispari o nessuna delle due: $-\operatorname{cotg}\left(\frac{x}{2}\right)$, $\arcsin|x|$, 2^x-3^x.

28/11/2008 - Seconda prova Parziale

1. Calcolare *(a)*: $\lim_{x\to 0+} e^{-\frac{1}{x}}\log x$ e *(b)*: $\lim_{x\to 0+}\frac{x^{2x}-1}{\log(1-x)}$.
2. Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\sin x$ nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$, trovando un punto $c_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Applicare il Teorema della media integrale alla stessa funzione, nello stesso intervallo, trovando un punto $c_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$. E' più grande c_1 o c_2?
3. Calcolare $\int \sqrt{x}e^{2\sqrt{x}}\,dx$.
4. Calcolare $D\left(\frac{1}{f(x)}\right)^{g(x)}$. Quali sono le ipotesi su f e g che garantiscono che si può eseguire tale derivata?
5. Nell'intervallo $[0,1]$ si considerino per $\alpha>1$ le funzioni $f(x)=\sqrt[\alpha]{x}$ e $g(x)=x^\alpha$. Disegnarne in maniera approssimativa i grafici. Si calcoli α in modo che l'area compresa tra i due grafici valga $1/2$.
6. Si calcoli $\int_1^{+\infty} 2^{-2x}\,dx$.
7. Si consideri la funzione $f(x)=|x|^{\frac{3}{2}}$. Disegnarne un grafico approssimativo. Dire se nel punto 0 la funzione f è derivabile; in caso affermativo, calcolarne la derivata in tale punto e discutere l'esistenza della derivata seconda.
8. Studiare la funzione $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x}$, specificandone la convessità.

28/11/2008 - Seconda prova Parziale

1. Si calcoli $\int_0^{+\infty} 3^{-3x}\,dx$.
2. Applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\cos x$ nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2}]$, trovando un punto $c_1\in[0,\frac{\pi}{2}]$. Applicare il Teorema della media integrale alla stessa funzione, nello stesso intervallo, trovando un punto $c_2\in[0,\frac{\pi}{2}]$. E' più grande c_1 o c_2?
3. Si consideri la funzione $f(x)=|x|^{\frac{4}{3}}$. Disegnarne un grafico approssimativo. Dire se nel punto 0 la funzione f è derivabile; in caso affermativo, calcolarne la derivata in tale punto e discutere l'esistenza della derivata seconda.
4. Calcolare $\int \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\,dx$.
5. Nell'intervallo $[0,1]$ si considerino per $\alpha>1$ le funzioni $f(x)=\sqrt[\alpha]{x}$ e $g(x)=x^\alpha$. Disegnarne in maniera approssimativa i grafici. Si calcoli α in modo che l'area compresa tra i due grafici valga $1/3$.
6. Calcolare $D\left(f(x)^{\frac{1}{g(x)}}\right)$. Quali sono le ipotesi su f e g che garantiscono che si può eseguire tale derivata?

7. Calcolare *(a)*: $\lim_{x\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\log x}$ e *(b)*: $\lim_{x\to 0+} \frac{\log(1-x)}{(2x)^x - 1}$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, specificandone la convessità.

3/12/2008 A

1. Studiare la convergenza delle serie (a): $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2+1}\right)$, (b): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}}$.

2. Si consideri la funzione $f(x) = \sin(3x+1)$. Determinare un intervallo contenente 0 in cui f è invertibile e calcolare in tale intervallo la funzione inversa. Disegnare i grafici di f e f^{-1}.

3. Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$, dove $\alpha \in [0,+\infty)$.

4. Determinare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $\sin x$ e $-\cos x$ per $x \in [0, 2\pi]$. Disegnare inoltre la regione di piano in questione.

5. Calcolare $\int \frac{x}{x^2+3x+3}\,dx$.

6. Dire per quali $a > 0$ esiste finito il $\lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{a}{2}\right)^n + a^{-2n}\right)$.

7. Dire per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^4 + b & \text{se } x \le 0 \\ cx^2 + d & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è, rispettivamente, continua, derivabile una volta, derivabile due volte.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x^2-1)e^x$.

3/12/2008 B

1. Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, dove $\alpha \in [0,+\infty)$.

2. Studiare la convergenza delle serie (a): $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n+1}\right)$, (b): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)^n}$.

3. Calcolare $\int \frac{x}{x^2+2x+3}\,dx$.

4. Determinare l'area della regione di piano compresa tra i grafici delle funzioni $\sin x$ e $\cos x$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$. Disegnare inoltre la regione di piano in questione.

5. Dire per quali $a > 0$ esiste finito il $\lim_{n\to\infty} \left((2a)^{-n} + a^{n/2}\right)$.

6. Dire per quali valori dei parametri reali a, b, c, d la funzione $f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{se } x \le 0 \\ cx^3 + d & \text{se } x > 0 \end{cases}$ è, rispettivamente, continua, derivabile una volta, derivabile due volte.

7. Si consideri la funzione $f(x) = \sin(2x-1)$. Determinare un intervallo contenente 0 in cui f è invertibile e calcolare in tale intervallo la funzione inversa. Disegnare i grafici di f e f^{-1}.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x^2-1)e^{-x}$.

18/12/2008 A

1. Dire per quali valori dei numeri reali a e b la funzione $f(x) = \begin{cases} 3x + a & \text{se } x < 0 \\ \log(1 + bx) & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua e derivabile.

2. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 - \sqrt[3]{x})}\, dx$.

3. Studiare la convergenza semplice della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{2n}}}$.

4. Si considerino le parabole di equazione $y = 1 - x^2$ e $y = 1 - (x-1)^2$. Esse dividono il semipiano $y > 0$ in quattro regioni, una illimitata e le altre tre limitate; rappresentare con un disegno. Calcolare le aree delle regioni limitate.

5. Sia $a \in \mathbf{R}$. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax) - ax}{x^2}$.

6. Trovare un polinomio (funzione polinomiale) di grado 3 tale che: il grafico passa per il punto $P = (0, 1)$, la retta tangente al grafico in P ha coefficiente angolare 2, il punto 0 è un punto di flesso.

7. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{|x^2 - x|}{x + 1}$, disegnandone il grafico senza studiare la derivata seconda.

18/12/2008 B

1. Calcolare $\displaystyle\int \frac{e^{3x}}{1 - 2e^{2x}}\, dx$.

2. Studiare la convergenza semplice della serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{\sqrt{\frac{n}{2}}}}$.

3. Si considerino le parabole di equazione $y = 1 - x^2$ e $y = 1 - (x+1)^2$. Esse dividono il semipiano $y > 0$ in quattro regioni, una illimitata e le altre tre limitate; rappresentare con un disegno. Calcolare le aree delle regioni limitate.

4. Sia $a \in \mathbf{R}$. Calcolare il $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - ax - 1}{x^2}$.

5. Dire per quali valori dei numeri reali a e b la funzione $f(x) = \begin{cases} \sin(ax) & \text{se } x < 0 \\ b - \frac{x}{2} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$ è continua e derivabile.

6. Trovare un polinomio (funzione polinomiale) di grado 3 tale che: il grafico passa per il punto $P = (0, 2)$, la retta tangente al grafico in P ha coefficiente angolare -1, il punto 0 è un punto di flesso.

7. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{|x^2 + x|}{1 - x}$, disegnandone il grafico senza studiare la derivata seconda.

17/3/2009

1. Studiare la convergenza semplice della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{\log n}}$. Provare che la serie non converge assolutamente.

2. Si consideri la funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[0, \pi/2)$. Fissato un punto $x_o \in [0, \pi/2)$ scrivere l'equazione della retta tangente r al grafico di f nel punto $(x_o, f(x_o))$. Fissato quindi $x_o = \frac{\pi}{4}$, calcolare l'area della regione di piano compresa tra il grafico di f, quello di r e l'asse x.

3. Calcolare $\lim_{x\to 0+} (\operatorname{tg} x)\cdot \log(\sin x)$ e $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \frac{\log(\cos x)}{\operatorname{tg} x}$.

4. Provare che $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = 1$ usando la definizione di limite.

5. Provare che la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ non è invertibile in $\mathbf{R}$, ma che lo è in $(-\infty, 0]$ e in $[0, +\infty)$. In ognuno di questi intervalli calcolare la funzione inversa, specificando dove f^{-1} è derivabile. Disegnare i grafici delle tre funzioni.

6. Provare che $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$. Trovare due punti a e b, con $0 < a < b$, tali che $\int_0^a e^{-x}\, dx = \int_a^b e^{-x}\, dx = \frac{1}{3}$. Rappresentare con un disegno.

7. Sia $a \in \mathbf{R}$; studiare la funzione $f(x) = \frac{(x+a)^2}{x-a}$, specificandone in particolare massimi, minimi, concavità e asintoti obliqui.

26/3/2009

1. Si consideri la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}$. Scriverne i primi 4 termini, semplificando le frazioni ai minimi termini; studiare la convergenza della serie.

2. Trovare degli asintotici semplici delle seguenti funzioni, per $x \to 0$: $\operatorname{tg}\left(\log(1+x^2)\right)$, $\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1-x}$, $\sin(1-\cos x)$.

3. *(a)* Calcolare la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$ e poi esprimerla tramite soli seni. *(b)* Determinare il dominio della funzione $g(x) = \log\left(1 + \frac{1}{\log x}\right)$ e quindi calcolarne la derivata.

4. Disegnare i grafici delle funzioni x e x^2 in $[0, +\infty)$. Si calcoli $a > 1$ tale che $\int_0^1 (x - x^2)\, dx = \int_1^a (x^2 - x)\, dx$. Rappresentare su un disegno le aree relative agli integrali.

5. Calcolare per $q \in \mathbf{R}$, $q \neq -1$, il $\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1+q^n}$.

6. Scrivere l'espressione analitica della funzione continua e dispari $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, il cui grafico, in $[0, +\infty)$, è così costituito: è il segmento che congiunge i punti $(0,0)$ e $(\frac{1}{2}, 1)$, quindi, per $x > \frac{1}{2}$, la semiretta di coefficiente angolare 1. Calcolare la funzione inversa di f.

7. Studiare la funzione $f(x) = x^{\frac{1}{3}} - x^3$.

22/6/2009

1. Calcolare il $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\log n} - \sqrt[3]{\log n}\right)$.

2. Studiare la convergenza delle seguenti tre serie: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{1-n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{1-n^2}$.

3. Calcolare i limiti $\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{2\sin(3x)}}{3\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cdot \cos x$.

   Provare che non esiste il $\lim_{x\to+\infty} \tan x$.

4. Si consideri l'ellisse E di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Si determini il punto $P = (x, y) \in E$ giacente nel semipiano $y > 0$ tale che la retta tangente ad E nel punto P abbia coefficiente angolare 1.

5. Calcolare $\int \frac{\sqrt{x^2-2}}{x}\, dx$.

6. Calcolare l'area della regione di piano, giacente nel semipiano $y > 0$, compresa tra la circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ e la parabola $y = x^2$.

7. Studiare la funzione (dominio, asinototi, concavità, massimi e minimi...) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$.

14/7/2009

1. Sia $k \in \mathbf{N}$; calcolare insieme di convergenza e somma della serie numerica $\sum_{n=k}^{\infty} q^n$. E' vero che la somma della serie e' sempre minore di 1?

2. Disegnare in modo approssimativo i grafici delle funzioni $\arcsin x$ e $\arccos(1 - x)$. Calcolare, usando la regola di de l'Hospital, il $\lim_{x \to 0+} \frac{\arcsin x}{\arccos(1-x)}$, giustificando l'applicabilità di tale regola.

3. Si consideri la funzione f definita da $f(x) = x^2$ se $x \geq 0$ e $f(x) = x^3$ se $x < 0$. Disegnarne un grafico. Dire se f è continua in 0, se ha derivata prima in 0, se ha derivata seconda in 0.

4. Provare, usando la definizione di limite, che $\lim\limits_{n \to \infty} (n^4 - n^3) = +\infty$.

5. Dire se l'integrale $\int_0^{\pi/2} \operatorname{tg} x \, dx$ è convergente o divergente. Dire per quali $\alpha > 0$ l'integrale $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos^\alpha x} \, dx$ è convergente, e in tali casi calcolarne il valore.

6. Dire se le funzioni $f(x) = x + \sin x$ e $g(x) = x \log |x|$ sono pari o dispari. Dire se hanno asintoti per $x \to +\infty$.

7. Studiare la funzione (dominio, asinototi, concavità, massimi e minimi...) $f(x) = e^{2x} - e^x$.

15/9/2009

1. Si considerino le funzioni $f(x) = 1 - e^x$, $g(x) = x \log |x|$, $h(x) = x^3 - x + 1$. Dire, per ognuna di essa, quanti zeri ha.

2. Si consideri la successione $x_n = \dfrac{an^2 + n}{bn^3 - 1}$, per $a, b \in \mathbf{R}$. Dire, al variare dei parametri a e b, quali limiti può avere la successione.

3. Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1 - c)^n}$, per $c \in \mathbf{R}$. Stabilire per quali c la serie converge. Dire se esiste, e in tal caso calcolarlo, un valore di c per cui la somma della serie valga -3.

4. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} \, dx$.

5. Per $x \geq 0$ si considerino le funzioni $f(x) = 1 - e^{-x}$, $g(x) = 2e^{-2x}$. Disegnarne approssimativamente i grafici. Calcolare l'area della regione compresa tra i loro grafici e l'asse y.

6. Dare un esempio di una funzione f con tre asintoti verticali e di una funzione g con due asintoti orizzontali $y = 0$ e $y = 1$.

7. Studiare la funzione $f(x) = \sin x + \sin^2 x$, omettendo la studio della concavità/convessità.

4/12/2009

1. (a) Dare un esempio di una successione non monotona che tende a 2. (b) Può una successione monotona non essere limitata nè inferiormente che superiormente? (c) Può una successione monotona assumere infinite volte lo stesso valore?

2. Trovare un asintotico per $x \to 0$ di $\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+4x}$.

3. Calcolare il $\lim_{x\to 1}(x-1)\log\left(1-\frac{1}{x}\right)$.

4. Stabilire la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-3n}$ converge e calcolarne la somma.

5. Si consideri la funzione $f(x) = x^n$ nell'intervallo $[a,b]$. Applicare il teorema di Lagrange, trovando un punto $c_n \in [a,b]$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c_n, f(c_n))$ sia parallela alla corda che congiunge i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$. Si rappresenti con un disegno la situazione nel caso $a = 0$, $b = 1$, al variare di n; qual è il $\lim_{n\to\infty} c_n$ in questo caso?

6. Per $x \geq 0$ si considerino le funzioni $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$, $f_3(x) = \frac{1}{x^3}$. Se ne disegnino i grafici in un unico sistema di riferimento. Calcolare l'area A della regione compresa tra f_2 e f_3 per $x \geq 1$. Dire se è possibile determinare un punto $a \in (0,1)$ tale che l'area della regione compresa tra i grafici di f_1 e f_2, per $x \in [c,1]$, sia uguale a A.

7. Studiare il grafico della funzione $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$.