Prove d'esame a.a. 2012–2013

Andrea Corli*

6 dicembre 2013

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2012–13, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

15/11/2012 - Prima prova parziale

1. Dire se esiste, e in caso affermativo calcolare, il $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\left(2^k+(-2)^k\right)\right)$.
2. Calcolare *(a):* $\lim_{n\to\infty}(n+2^n)^{\frac{1}{n+1}}$; *(b):* $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\log(n+1)}-\sqrt{\log(n)}\right)$.
3. Studiare il comportamento delle serie *(a):* $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$; *(b):* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n!)}$.
4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\log\left(n-\frac{1}{n}\right)}$.
5. Calcolare $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[4]{x^4+2x^3}\right)$.
6. Sia f la funzione definita in $[0,3)$ da $f(x)=2x$ se $x\in[0,1]$, $f(x)=2x-4$ se $x\in(1,2)$, $f(x)=-2x+8$ se $x\in[2,3)$. Disegnare il grafico di f, discuterne la continuità, stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare e disegnare il grafico di f^{-1}.
7. Calcolare *(a):* $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x-\frac{\pi}{2}}{\cos x}$; *(b):* $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$.
8. (Matlab) Scrivere un breve script per disegnare il grafico della funzione $\operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[-\pi,\pi]$, evitando di far apparire righe verticali. Restringere l'asse delle ordinate all'intervallo $[-5,5]$.
9. Disegnare dei grafici approssimativi delle funzioni $f(x)=|2\sin x-1|$, $g(x)=e^{\operatorname{tg} x}$, $h(x)=\frac{1}{\cos x}$.

8/1/2013 - Seconda prova parziale

1. Si consideri la funzione f definita da $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$ in $\mathbf{R}\setminus\{0\}$. Provare che f è prolungabile per continuità a 0. Se $\bar f$ è il suo prolungamento, stabilire se $\bar f$ è di classe C^1.
2. Sia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ una funzione avente come asintoto orizzontale a $+\infty$ la retta $y=1$. E' vero allora che $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$?
3. Calcolare $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

4. (Matlab) Sia $f(x) = \sin(x)$ in $[0, 2\pi]$. Fissato $n = 100$, scrivere un breve script che calcola e disegna il grafico di $f \circ f \circ \ldots \circ f$, dove la composizione è fatta n volte.

5. Calcolare $\displaystyle\int_0^1 \log(1 + x^2)\, dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}\sqrt[3]{1 + x^2}}\, dx$.

7. Sia $f(x) = \int_0^x e^{-y^2}\, dy - \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Calcolare il $\lim_{x\to+\infty} f(x)e^{x^2}$, motivando i passaggi.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x + 2}{x(x - 1)}$. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

22/1/2013

1. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. Calcolare il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+1}}$.

3. Discutere quanti zeri ha la funzione $f_a(x) = e^x - ax$, al variare del parametro $a > 0$.

4. Sia $a > 0$; applicare il Teorema di Lagrange alla funzione $f(x) = \cosh(x)$ nell'intervallo $[0, a]$ trovando esplicitamente il punto x_0.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x}}\, dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1 + x^3)}{x^2}\, dx$

7. (Matlab) Scrivere un breve script che calcoli le prime dieci derivate (simboliche) della funzione $f(x) = e^{-x^2}$ e ne disegni i grafici in dieci figure diverse.

8. Studiare la funzione $f(x) = \log\left(\sqrt{x} + \sqrt{1 - x}\right)$. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

12/2/2013

1. Verificare, usando la definizione di limite, che $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

2. Calcolare il $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\log_a x)^{\frac{1}{\log_b x}}$ per $a > 1$, $b > 1$.

3. Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{n-1}}$.

4. Stabilire il periodo della funzione $f(x) = \sin^2\left(\frac{6}{5}x + \frac{\pi}{3}\right)$ e disegnarne un grafico approssimativo.

5. Stabilire minimi, massimi e punti di flesso della funzione $f(x) = (x - 1)^4(x + 1)$ e disegnarne un grafico approssimativo.

6. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = x \log(1 + x^2)$

7. Scrivere un breve script in Matlab che calcoli i valori di $\int_0^n e^{-x^2}\, dx$ per $n = 1, 2, \ldots, 10$. Usare il comando `num2str` per rappresentare il risultato in maniera facilmente leggibile a command window.

8. Studiare la funzione $f(x) = \int_0^x \frac{\log t}{1+t}\, dt$ in $(0, +\infty)$ (limiti, massimi e minimi, convessità, asintoti).

18/06/2013

1. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\log n}\right)^{\log\log n}$.
2. Stabilire per quali $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(1+a^n)}$ converge.
3. Dire se la funzione $f(x) = \operatorname{arctg}(1 + e^{-x})$ è invertibile, motivando la risposta. In caso affermativo, scrivere la sua funzione inversa, specificandone il dominio.
4. Si consideri la funzione $f(x) = 2x^3 + x + 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$. Applicare il teorema del valor medio di Lagrange e dire a quanti punti x_0 esso dà luogo. Rappresentare graficamente in modo approssimativo.
5. Cercare un asintotico semplice della funzione $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ vicino a 0 e uno vicino a 1.
6. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$.
7. (Matlab) Rappresentare i grafici delle funzioni f_n, definite nell'intervallo $[0, 2]$, per $n = 1, 2, \ldots 10$, in un opportuno grafico a scala logaritmica in cui i grafici risultino rette.
8. Studiare la funzione $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$. Non e' richiesto lo studio della derivata seconda; studiare con precisione il comportamento della funzione vicino al punto 0.

15/7/2013

1. Dire se esiste, e in caso affermativo calcolare, il $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(2^k + (-2)^k\right) \right)$.
2. Calcolare *(a):* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (n + 2^n)^{\frac{1}{n+1}}$; *(b):* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\log(n+1)} - \sqrt{\log(n)}\right)$.
3. Studiare il comportamento delle serie *(a):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$; *(b):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\log(n!)}$.
4. Studiare la convergenza semplice e assoluta della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log\left(n - \frac{1}{n}\right)}$.
5. Calcolare $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x} - \sqrt[4]{x^4+2x^3}\right)$.
6. Sia f la funzione definita in $[0, 3)$ da $f(x) = 2x$ se $x \in [0, 1]$, $f(x) = 2x - 4$ se $x \in (1, 2)$, $f(x) = -2x + 8$ se $x \in [2, 3)$. Disegnare il grafico di f, discuterne la continuità, stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare e disegnare il grafico di f^{-1}.
7. Calcolare *(a):* $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos x}$; *(b):* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$.
8. (Matlab) Scrivere un breve script per disegnare il grafico della funzione $\operatorname{tg} x$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$, evitando di far apparire righe verticali. Restringere l'asse delle ordinate all'intervallo $[-5, 5]$.
9. Disegnare dei grafici approssimativi delle funzioni $f(x) = |2\sin x - 1|$, $g(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, $h(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

3/9/2013

1. Calcolare il $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!}$ e poi verificare il risultato usando la definizione di limite.

2. Dire per quali $\alpha > 0$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^\alpha - n^\alpha}$ è convergente.

3. Disegnare in maniera approssimativa l'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2;\ x > 0,\, y > 0,\, xe^{-x/y} \geq 1\}$.

4. Si consideri la funzione $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da $f(x) = 1 + \sin x$ se $x < 0$ e da $f(x) = e^x$ se $x \geq 0$. Dire se f è di classe C^1 e, in caso affermativo, se è di classe C^2. Disegnarne il grafico.

5. Calcolare $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\,dx$.

6. Provare che l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx$ è convergente utilizzando i criteri di convergenza e quindi calcolarne il valore.

7. Si consideri la funzione f definita da $f(x) = x+1$ se $x < 1$ e $f(x) = 4x^2+1$ se $x \geq 1$. Scrivere un breve script in Matlab che disegni il grafico di f nell'intervallo $[-2,2]$, evitando segmenti verticali nei punti di discontinuità.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sin x + \sqrt{3}\cos x$.

19/9/2013

1. Calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log^\alpha n}}$.

2. Provare che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ è convergente utilizzando gli usuali criteri di convergenza. Provare poi che è asintoticamente telescopica e calcolarne la somma.

3. Provare analiticamente che $\cosh x > \sinh x$. Per quali $k > 1$ si ha che i grafici di $\cosh x$ e $k \sinh x$ si intersecano?

4. Calcolare, se esiste, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - x^2}{1 - e^{x^3}}$, motivando tutti i passaggi.

5. Utilizzando un ciclo `for`, scrivere uno script che disegni i grafici delle funzioni $(x-n)^2$, $n = 1, \dots, 5$, nell'intervallo $[0,10]$.

6. Calcolare una primitiva F della funzione $f(x) = \mathrm{tg}^2(x)$. E' vero che ogni altra primitiva di f differisce da F per una costante?

7. Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{x^2\sqrt{|1-x^2|}}\,dx$, dove $a, b \in \mathbf{R}^*$.

8. Studiare la funzione $f(x) = (x^2 - x^3)e^{-x}$. Limitarsi ad uno studio qualitativo della derivata seconda.