Prove d'esame a.a. 2018-19

Andrea Corli*

17 dicembre 2019

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2018–19, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

31/10/2018 - Prima prova parziale

1. Sia $a_n = n + \log n$, $b_n = n - \log n$ per $n = 1, 2, \ldots$. *(a)* Provare, usando la definizione che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. *(b)* Dire se la successione b_n è (strettamente) crescente.
2. Calcolare *(a)*: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - n}\right)$, *(b)*: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[2n]{n!}}$.
3. *(a)* Studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^3}$; *(b)* dire per quali $q \geq 0$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n}$.
4. Calcolare *(a)*: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{1}{x \sin x}\right)$, *(b)*: $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} \frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}}$.
5. Dire se sono prolungabili per continuità in 0 le funzioni: *(a)*: $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; *(b)*: $g(x) = \dfrac{x}{\log(\cos x)}$.
6. Calcolare, se esistono, le funzioni inverse delle seguenti funzioni, specificando di entrambe dominio e immagine: *(a)*: $f(x) = 2x + |x|$, *(b)*: $g(x) = \log(x + \sqrt{x})$.
7. (Matlab) Sia $a_n = n - \log n$. Disegnare un grafico della successione a_n per $n = 1, \ldots, 20$. Cercare con un ciclo `while` il più piccolo n tale che $a_n > 10$.
8. Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni, mostrando con chiarezza i passi intermedi nel disegno: $f(x) = \max(\{x\}, \{-x\})$, $g(x) = 2\arcsin(3 - x)$, $h(x) = 1 + \sin\left(\pi + \frac{x}{4}\right)$.

21/12/2018 - Seconda prova parziale

1. Calcolare la derivata prima delle funzioni $f(x) = \dfrac{1}{\arccos(\sqrt{1+x})}$, $g(x) = x^{\log(\sin^2 x)}$.
2. Dire dove la funzione $f(x) = x|x|\sqrt[3]{x^2 - 1}$ è derivabile; specificare di che tipo sono i punti in cui non è derivabile.
3. Sia $a > 0$ e $f(x) = \dfrac{x}{x-a}$. Per quali a si può applicare il Teorema di Lagrange alla funzione f nell'intervallo $[0, 1]$? In tali casi, calcolare esplicitamente il punto x_0 che compare in tale teorema. Rappresentare con un disegno.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

4. Calcolare, usando gli sviluppi di MacLaurin, il $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3 + x^2 + \log(1-x^2)}$.

5. Calcolare una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{\sin x \cos x}{(\sin x - 1)^2}$.

6. Calcolare l'area della regione compresa tra il grafico della funzione $f(x) = \dfrac{\log x}{x^{3/2}}$ e l'asse delle x, per $x \geq e$. Rappresentare con un disegno.

7. (Matlab) Usando un cicle `while`, calcolare n in modo che $\int_0^n e^{x^2}\, dx > 100$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \arcsin\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

22/1/2019

1. Calcolare *(a)*: $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n-1}$, *(b)*: $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^4+1} - n\sqrt{n^2+1}\right)$.

2. Stabilire per quali valori dei parametri $\alpha > 0$ e $a > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^\alpha a^n}{n!}$ converge.

3. Sia $f(x) = \dfrac{3e^x - 1}{e^x + 2}$. Calcolare dominio di f, dimostrare che è invertibile studiandone la monotonìa, determinarne l'immagine. Calcolare poi esplicitamente la funzione inversa.

4. Studiare i punti di non derivabilità della funzione $f(x) = \left|\log\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)\right|$.

5. Calcolare $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{\log(\log x)}{x}\, dx$.

6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}}\, dx$.

7. (Matlab) Rappresentare il grafico della funzione f definita nell'intervallo $[0,3]$ da $f(x) = x^2$ se $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ se $x \in (1,2)$ e $f(x) = 3 - x$ se $x \in [2,3]$.

8. Studiare il grafico della funzione $f(x) = x^2 - 8x + 4\log(x-1)$.

11/2/2019

1. Siano p, q due numeri naturali maggiore o uguali di 1. Calcolare, a seconda del valore di p e q, il $\lim_{x\to\infty} \dfrac{n^p + n\log n}{n^q \log n}$.

2. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n - \log n}$.

3. Calcolare il $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\log(1+x)}\right)$.

4. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2 + x\cos x$ è definitivamente crescente.

5. Stabilire il numero degli zeri dell'equazione $2x^3 - 3x^2 - 12x + 7 = 0$.

6. Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{x(2-x)}\, dx$.

7. (Matlab) Siano $f(x) = e^x - 1$ e $g(x) = 1 - x^2$ per $x \in [0,1]$. Disegnare i grafici di f e g, determinare il punto di intersezione z dei due grafici e calcolare l'area della regione compresa tra i due grafici in $[0, z]$.

8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$, con particolare riferimento alla sua derivabilità. Non è richiesto lo studio della derivata seconda.

17/6/2019

1. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \left(n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}\right)$.

2. Stabilire per quali valori di $\alpha > 0$ le serie seguenti convergono: *(a):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n^\alpha}$; *(b):* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + 2^n)}{n^\alpha}$.

3. Sia $f \in C^2(I)$ e per $x \in I$ sia $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{se } x \neq x_0, \\ f'(x_0) & \text{se } x = x_0. \end{cases}$ Dimostrare che g è derivabile nel punto x_0 e calcolarne la derivata.

4. Calcolare il campo di esistenza, la derivata (e il suo campo di esistenza) ed eventuali asintoti della funzione $f(x) = \log \arcsin(x^2 - 3)$. Non è richiesto il grafico.

5. Calcolare una primitiva della funzione $\dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

6. Dimostrare che l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+4)\sqrt{x}}\,dx$ è convergente. Quindi calcolarne il valore.

7. (Matlab) Sia $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Usando il simbolico, calcolare con un ciclo `for` la funzione composta $f \circ f \circ f \circ f \circ f$ e farla apparire a `cw` nella notazione manuale.

8. Studiare la funzione $f(x) = \log(\sin x) - 2\sin x$ in $(0, \frac{\pi}{2}]$.

15/7/2019

1. Verificare, usando la definizione di limite, che $\lim_{n\to\infty} (n + 2^n) = +\infty$.

2. Calcolare un asintotico delle successioni $a_n = \dfrac{2}{n} - \sin\dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n} - \sin\dfrac{1}{n}$. Studiare quindi la convergenza delle serie che hanno per termine generale a_n e b_n.

3. Calcolare *(a):* $\lim_{x\to 0\pm} 2^{\frac{1}{x}} \sin x$; *(b):* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(3^x - 2^x)}{x}$.

4. Si consideri la funzione $f(x) = x + 2^x$; stabilirne il dominio e disegnarne un grafico approssimativo. Dimostrare che f è invertibile e calcolare quindi $(f^{-1})'(3)$. Rappresentare graficamente il risultato.

5. Calcolare $\displaystyle\int \sqrt{2 - 3x^2}\,dx$.

6. Stabilire se gli integrali generalizzati *(a):* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$, *(b):* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$ sono convergenti o meno usando i criteri di convergenza. Quindi calcolare il valore di quelli convergenti. Tracciare un grafico approssimativo della funzione integranda.

7. (Matlab) Plottare nel piano (x, y) il grafico della funzione $x = y + 3^y$ e della retta $y = x - 2$. Calcolare infine le coordinate del loro punto di intersezione e rappresentarlo graficamente.

8. Studiare la funzione $f(x) = \dfrac{x-2}{e^x}$.

3/9/2019

1. Calcolare, se esistono i limiti, *(a)*: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-3)^n}{n!}$; *(b)*: $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(n\pi + \dfrac{1}{n}\right)$.

2. Studiare la convergenza delle serie *(a)*: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\alpha+n}{1+n^\alpha}\right)^n$, per $\alpha \in \mathbf{R}$; *(a)*: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{\log n}{\log(\log n)}$.

3. Calcolare, se esistono i limiti, *(a)*: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{tg}(2x^2)}{\mathrm{tg}^3(\pi x)}$; *(b)*: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

4. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \arccos x$ nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$. Rappresentare con un disegno.

5. Calcolare gli integrali *(a)*: $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$; *(b)*: $\displaystyle\int \frac{x^3+3x^2}{x^2+4x+3}\,dx$.

6. Stabilire per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ è convergente l'integrale generalizzato $\displaystyle\int_1^\infty \sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)dx$.

7. (Matlab) si consideri la funzione f che vale x^2 nell'intervallo $[-1, 0]$ e x nell'intervallo $(0, 1]$. Disegnarne il grafico utilizzando una combinazione dei comandi `for` e `if`.

8. Studiare la funzione $f(x) = \log(x^2 - 4x + 3)$.

16/9/2019

1. Sia $a_n = n\left(1 - e^{-\frac{1}{n}}\right)$. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{arctg}\, a_n$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \arcsin a_n$, motivando la risposta.

2. Sia $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Studiare la convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{a_n}$.

3. Studiare al variare di $a \in \mathbf{R}$ la convergenza della serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n + a^n}{n^3+1}$.

4. Sia f la funzione definita da $f(x) = x^2\, \mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{x}$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 0$. Dire se f è continua, derivabile, due volte derivabile. Disegnare un grafico approssimativo di f.

5. Calcolare *(a)*: $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx$, *(b)*: $\displaystyle\int x^2 e^{-x}\,dx$.

6. Studiare la convergenza degli integrali *(a)*: $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$ e *(b)*: $\displaystyle\int_4^\infty \frac{1}{x^2-4x+3}\,dx$.

7. (Matlab) Calcolare le prime 20 somme parziali della serie dell'esercizio 2 e rappresentarle graficamente.

8. Studiare la funzione $f(x) = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.