

Prove d'esame a.a. 2019-20

Andrea Corli*

15 settembre 2020

Sono qui raccolti i testi delle prove d'esame assegnati nell'a.a. 2019–20, relativi al Corso di Analisi Matematica I (semestrale, 12 crediti), Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto da me presso l'Università degli Studi di Ferrara.

8/11/2019 - Prima prova parziale

1. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni.
(i): è vero o falso che $a_n \sim b_n$ implica $a_n - b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$?
(ii): è vero o falso che $a_n - b_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$ implica $a_n \sim b_n$?
2. Calcolare i seguenti limiti motivando i passaggi; verificare il risultato tramite la definizione.
(i): $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}}$; (ii): $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^3)$.
3. Calcolare (i): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\sin n}$; (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \log n}{n^n}$.
4. Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\sqrt{n}}$, discutendo separatamente i casi $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$.
5. Calcolare (a): $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{x-1}$, (b): $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.
6. Calcolare, se esistono, le funzioni inverse delle seguenti funzioni, specificando di entrambe dominio e immagine:
(a): $f(x) = \arctg(x^3 + 1)$, (b): $g(x) = 2x - 1$ se $x \leq 0$, $g(x) = x^2 - 1$ se $x \geq 0$.
7. (Matlab) Scrivere uno script che disegna il grafico delle funzioni f e f^{-1} in una stessa finestra grafica, dove f è definita nell'intervallo $[-1, 1]$ da $f(x) = e^{-x}$ se $x \in [-1, 0]$ e $f(x) = 1 - x^3$ se $x \in (0, 1]$.
8. Disegnare un grafico approssimativo delle seguenti funzioni, mostrando con chiarezza i passi intermedi nel disegno: $f(x) = H(2-x) \cdot H(x+3)$, $g(x) = |1 + \arctg(x+1)|$, $h(x) = \arcsin x \cdot \arccos x$.

7/1/2020 - Seconda prova parziale

1. Si disegni un grafico approssimativo della funzione $f(x) = x + \frac{1}{x-2}$ evidenziando i passaggi intermedi. Esistono (e, se sì, determinarli e rappresentarli sul grafico) punti in cui il coefficiente angolare della retta tangente vale -3 ?
2. Sia $f(x)$ la funzione definita da $\frac{\sin(2\pi x)}{2\pi x}$ se $x \neq 0$ e 1 se $x = 0$. Dimostrare che il grafico di f interseca una sola volta la retta $y = x$ nel primo quadrante.

*Dipartimento di Matematica, Università di Ferrara

3. (a): calcolare utilizzando la regola di de l'Hospital il $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\sin x} - 1}{e^x - 1}$; ritrovare lo stesso risultato utilizzando gli asintotici. (b) Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - \cos x}{x^2}$ utilizzando gli sviluppi di MacLaurin.
4. Calcolare (a): $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$, (b): $\int x^3 e^{x^2} \, dx$.
5. Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \cos(4x)} \, dx$.
6. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbf{R}$ converge l'integrale generalizzato $\int_0^\infty \frac{1 - e^{-x}}{x^\alpha} \, dx$.
7. (Matlab) Calcolare (simbolicamente) l'area dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, per $a > 0$ e $b > 0$.
8. Studiare la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}(x - 4)$.

20/1/2020

1. Calcolare, se esistono, (a): $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$; (b): $\lim_{n \rightarrow \infty} n + \sin(n\pi/2)$.
2. Studiare la convergenza delle serie: (a): $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-2)^n}{n!}$; (b): $\sum_{n=1}^\infty (\log n - \log(n-1))$.
3. Dimostrare che l'equazione $e^{-x} = x$ ha una soluzione utilizzando il teorema degli zeri. Rappresentare graficamente.
4. Dire, motivando, se la funzione f definita da $f(x) = x$ se $x \leq 0$ e $f(x) = x^2$ se $x > 0$ è continua e se è derivabile. Disegnare un grafico di f e f' (dove sono definite).
5. Calcolare (a): $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} \, dx$; (b): $\int x \log x \, dx$.
6. Stabilire la convergenza dei seguenti integrali generalizzati: (a): $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$; (b): $\int_1^{+\infty} e^{-x} \log x \, dx$.
7. (Matlab) Scrivere uno script che calcoli simbolicamente le prime cinque derivate della funzione $f(x) = e^{x^2}$ e ne disegni il grafico.
8. Studiare la funzione $f(x) = x\sqrt{1-x}$.

3/2/2020

1. Dire se esistono, e in caso affermativo, calcolare (a): $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log n + \sin n)$; (b): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-2} \right)^{-n}$.
2. Studiare la convergenza delle seguenti serie e, ove possibile, calcolarne la somma: (a): $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{3^{n-1}}{4^{n+1}}$;
 (b): $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$.
3. Disegnare nel piano, in maniera approssimativa, i seguenti insiemi: $A = \{(x, y): x^2 = y^2\}$,
 $B = \{(x, y): y^2 = 1 + \cos x\}$, $C = \{(x, y): e^{xy} = 2\}$.

4. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 4 della funzione $f(x) = \log(1 + 2x) - 2 \sin x$, scrivendo l'errore secondo Peano.
5. Calcolare (a): $\int_0^\pi x \sin x \, dx$; (b): $\int_0^{\frac{1}{2}} x^3 \sqrt{1 - 4x^2} \, dx$;
6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1 + x^2} \, dx$.
7. (Matlab) Dati i punti $(0, 0)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, calcolare il polinomio di grado 2 il cui grafico passa per cui punti. Disegnare quindi il grafico del polinomio.
8. Studiare la funzione $f(x) = e^x(x^2 + 2x - 3)$.

15/6/2020

1. Dire se la successione $a_n = \frac{1}{(-a)^n}$ converge, diverge o è indeterminata a seconda del valore di $a \in (0, +\infty)$.
2. Studiare la convergenza delle seguenti serie: (a): $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$; (b): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{\sqrt{n}}$.
3. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \max\{x, -x^3\}$. Sire inoltre se è continua e se è derivabile.
4. Scrivere lo sviluppo di MacLaurin di ordine 3 della funzione $f(x) = 1 + \sin(2x) - \cos(3x)$, scrivendo l'errore secondo Peano.
5. Calcolare (a): $\int \frac{1}{x(1 + x^2)} \, dx$; (b): $\int_0^1 x^2 3^{x^3} \, dx$.
6. Studiare la convergenza dell'integrale generalizzato $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1 + x^b)} \, dx$ al variare di a e b in $(0, +\infty)$.
7. (Matlab) Creare uno script che, utilizzando il ciclo `for`, disegni il grafico della funzione $[x]$ nell'intervallo $[0, 5]$.
8. Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

13/7/2020

1. Calcolare $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n^2} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$.
2. Studiare il comportamento delle serie: (a): $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{n+1}$; (b): $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n+1]{3} - \sqrt[n]{3})$.
3. Dire se esistono o meno i seguenti limiti e, nel caso affermativo, calcolarli; di entrambe le funzioni disegnare un grafico approssimativo: (a): $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos x$; (b): $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \sin x)$.
4. Calcolare il dominio della seguente funzione; dire dove è continua; dire dove è derivabile e, dove questo avviene, calcolarne la derivata: $f(x) = \sqrt{x^4 - 1} - \sqrt[4]{4 - x^2}$.
5. Calcolare: (a) $\int \arctg \frac{1}{x} \, dx$; (b): $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x} + x\sqrt{x}} \, dx$.

6. Dire se i seguenti integrali generalizzati sono convergenti o meno: (a): $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx$; (b): $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x^3+x^4}} dx$.
7. (Matlab) Creare uno script che, tramite un ciclo **while**, calcola il più piccolo n tale che $\int_1^n \log x \, dx > 100$.
8. Studiare la funzione $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$.

10/9/2020

1. Calcolare (a): $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+a^n)}{n}$, dove $a \in [0, +\infty)$; (b): $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(n^b)$, dove $b \in (-\infty, +\infty)$.
2. Stabilire per quali $a \in [0, +\infty)$ la serie $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{a^n}$ è convergente. Per tali a , trovare poi una serie maggiorante e una serie minorante di cui si possa calcolare la somma, in modo da stimare la somma della serie di partenza.
3. Dire se le seguenti funzioni ammettono asintoti obliqui per $x \rightarrow +\infty$: (a): $\frac{x^2(1+\sin x)}{\sqrt{1+x^2}}$; (b): $x^2 \arctg\left(\frac{1}{x}\right) - 2x$.
4. Calcolare il dominio della seguente funzione; dire dove è continua; dire dove è derivabile e, dove questo avviene, calcolarne la derivata: $f(x) = \frac{2^{\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}}$.
5. Calcolare: $\int \sqrt{x(1-x)} \, dx$.
6. Dire se i seguenti integrali generalizzati sono convergenti o meno: (a): $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x^3)}} dx$; (b): $\int_2^\infty \frac{1}{x-\sqrt{x}} dx$.
7. (Matlab) Sia $f(x) = x + e^x$ in $[0, 1]$. Creare uno script che, disegna il grafico della funzione inversa f^{-1} nell'intervallo $[1, f(1)]$ e ne calcola l'integrale.
8. Studiare la funzione $f(x) = \log(x^2 - 4x + 3)$.