

Esercitazioni di Analisi Matematica I

Andrea Corli

13 settembre 2021

Indice

Introduzione	v
1 Nozioni preliminari	1
1.1 Sommatore	1
1.2 Fattoriali	1
1.3 Numeri reali	2
1.4 Intervalli, max, min, sup, inf	2
1.5 Altri esercizi	2
2 Successioni	3
2.1 Definizioni	3
2.2 Limiti	3
2.3 Successioni definite per ricorrenza	4
2.4 Varia	5
3 Serie numeriche	7
3.1 Definizioni	7
3.2 Serie a termini positivi	7
3.3 Serie a termini di segno qualsiasi	8
4 Funzioni di una variabile reale	9
4.1 Grafici, che passione!	9
4.2 Campo di esistenza	11
4.3 Composizione	11
4.4 Funzioni simmetriche	12
4.5 Funzioni periodiche	12
4.6 Funzioni monotone, invertibili, inverse	12
5 Limiti di funzioni e continuità	13
5.1 Limiti: fatti basilari	13
5.2 Asintotici	13
5.3 Calcolo di limiti	13
5.4 Di tutto un po'	14
5.5 Continuità	14
5.6 I teoremi relativi alla continuità	14
6 Calcolo differenziale	15
6.1 Generalità	15
6.2 Calcolo di derivate	15
6.3 Rette tangenti	15
6.4 Mica sempre derivabili...	16
6.5 Inverse	16
6.6 Varia umanità	16
6.7 C^n	17
6.8 Concavità e convessità	17
6.9 Grafici	17
6.10 Applicazione: problemi di ottimizzazione	17
6.11 I Teoremi di de l'Hospital	18
6.12 Polinomi e formula di Taylor	18

7	Calcolo integrale	19
7.1	Integrali come aree	19
7.2	Varie semplici primitive	19
7.3	Funzioni razionali	20
7.4	Funzioni trigonometriche	21
7.5	Aree di regioni piane	21
7.6	Funzioni integrali	21
7.7	Notazioni e dimensioni	21
7.8	Integrali di funzioni discontinue	22
7.9	Integrali generalizzati	22
	Bibliografia	25

Introduzione

Questi esercizi si riferiscono agli argomenti svolti nel corso di Analisi Matematica I, corso di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, tenuto presso l'Università di Ferrara. Più precisamente, si tratta degli esercizi proposti durante le esercitazioni in aula. Per quanto riguarda i libri di esercizi consigliati, si vedano [7, 3].

Ferrara, 13 settembre 2021

Andrea Corli

Capitolo 1

Nozioni preliminari

1.1 Sommatorie

1.1.1 Scrivere in forma di sommatoria $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 101$.

1.1.2 Dimostrare che

(i) $\sum_{k=1}^n 2k = n(n+1)$,

(ii) $\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$.

1.1.3 Calcolare

(i) $\sum_{k=0}^n (-1)^k$,

(ii) $\sum_{k=1}^n q^{-k}$.

1.1.4 Calcolare $\sum_{k=1}^n \log \frac{k+1}{k}$.

1.1.5 Calcolare $\sum_{k=1}^n \log k$.

1.1.6 Si dice che n numeri $a_1, \dots, a_n$, sono in *progressione aritmetica* se la differenza tra ogni termine e il precedente è costante, cioè se

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d,$$

dove $d \in \mathbb{R}$. In altri termini, $a_k - a_{k-1} = d$ per $k = 2, 3, \dots, n$. Analogamente a quanto fatto per le progressioni geometriche:

(i) dedurre l'espressione esplicita del termine a_k , $k = 1, 2, \dots, n$;

(ii) calcolare la somma degli n termini di una progressione aritmetica.

1.2 Fattoriali

1.2.1 Siano $a_n = (2n)!$ e $b_n = (2n+1)!$, per $n = 0, 1, 2, \dots$. Calcolare $a_0, a_1, a_2, \frac{a_n}{a_{n+1}}$ e $b_0, b_1, b_2, \frac{b_n}{b_{n+1}}$.

1.2.2 Sia $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ per $n \in \mathbb{N}$ e $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

(i) Calcolare $\binom{n}{k}$ per $n = 0, 1, 2, 3$ e tutti i relativi valori di k .

(ii) Dimostrare che

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(iii) Dimostrare che

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Costruire il triangolo di Tartaglia.

(iv) Scrivere termine a termine la formula di Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

nei casi $n = 3, 4, 5$.

1.2.3 Un lucchetto (come quelli di alcune chiusure per biciclette) ha 4 finestre e 10 cifre per ogni finestra. Quante combinazioni?

1.3 Numeri reali

1.3.1 Dimostrare in dettaglio che se m è un numero naturale non nullo, allora

$$m^2 \text{ pari} \Rightarrow m \text{ pari}.$$

1.3.2 Dimostrare che $\sqrt{3}$ è irrazionale.

1.4 Intervalli, max, min, sup, inf

1.4.1 Rappresentare graficamente gli intervalli

$$[0, 1], (-2, 1], (-1/2, 3/2), (-\infty, -1), [-1, +\infty).$$

Rappresentare inoltre gli insiemi seguenti e dire se sono o meno intervalli:

$$[0, 1] \cap (-1/2, 3/2), [0, 1] \cup (-1/2, 3/2), (-2, 1] \cap (2, 3), (-2, 1] \cup (2, 3), (-\infty, 1) \cap [1, +\infty].$$

1.4.2 Dire se gli intervalli $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) hanno massimo o minimo.

1.4.3 Semplificare se possibile le seguenti espressioni, rappresentare gli insiemi graficamente, calcolare massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore:

$$(i) [1, 3] \cap (2, 4),$$

$$(ii) (-1, 3) \cap [-2, 0] \cap (1, 2],$$

$$(iii) [-1, 0) \cup [0, 1],$$

$$(iv) [-1, 2) \cap (2, 4],$$

$$(v) [-1, 3] \cup (4, 5),$$

$$(vi) [-1, 0) \cup \{4\},$$

$$(vii) [1, 3] \setminus \{2\}.$$

1.4.4 Siano a, b due numeri reali; dimostrare che

$$\min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}, \quad \max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}.$$

1.4.5 Calcolare massimo, minimo (se esistono) ed estremo superiore, estremo inferiore dell'insieme

$$\left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}.$$

1.4.6 Sia $E \subset \mathbb{R}$; può un punto di E essere sia massimo che minimo di E ?

1.5 Altri esercizi

1.5.1 Calcolare parte intera e frazionaria di 8.2, 0, -1.2, -3.15.

Capitolo 2

Successioni

2.1 Definizioni

2.1.1 Dimostrare, usando la definizione, che

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty$;

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^n = +\infty$.

2.1.2 Dire se hanno limite le successioni $a_n = n \sin \left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $b_n = \frac{1}{n} \sin \left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

2.1.3 Dire se le seguenti successioni sono limitate, monotone:

$$a_n = \left\lceil \sin \left(\frac{n\pi}{4}\right) \right\rceil, \quad b_n = n^2 + (-1)^n, \quad c_n = \begin{cases} 2^n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 2^{-n} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

2.1.4 Se una successione non è crescente è allora necessariamente decrescente?

2.1.5 Dire se la successione $\frac{n-5}{n^2}$ è definitivamente decrescente.

2.1.6 Si è visto che se una successione è convergente allora è limitata. Ripercorrere la dimostrazione considerando le successioni $a_n = \frac{1}{n}$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

2.2 Limiti

2.2.1 Cercare un asintotico semplice di

(i) $\frac{n^2 \log n + n}{\log(3n)}$;

(ii) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$;

(iii) $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.

2.2.2 Calcolare

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(n^2 + 2n + 1)$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\sqrt{n}}$;

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, dove $a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$;

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{\log_3 n}$.

2.2.3 Calcolare

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^3 - n^2 + 3}$;

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) n;$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\log n};$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} (\log n)^{\frac{1}{n}}.$$

2.2.4 Calcolare

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n};$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n/2}}.$$

$$2.2.5 \text{ Calcolare } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^n}{1+q^n} \text{ per } q \neq -1.$$

2.3 Successioni definite per ricorrenza

Molto spesso, soprattutto nelle applicazioni, una successione è definita *per ricorrenza*. In questo caso si dà:

- (i) il valore del termine iniziale (o dei termini iniziali);
- (ii) una formula *ricorsiva* che permette di calcolare un termine a partire dal precedente.

Ad esempio, se definiamo $a_1 = 3$ e la formula ricorsiva $a_n = 2a_{n-1} + 1$ se $n \geq 2$, otteniamo la successione:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3, \\ a_2 &= 2a_1 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ (applicando la formula ricorsiva con } n = 2), \\ a_3 &= 2a_2 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15 \text{ (applicando la formula ricorsiva con } n = 3), \end{aligned}$$

e così via.

2.3.1 Quale successione nota è definita ricorsivamente come $a_1 = 1$, $a_n = na_{n-1}$?

2.3.2 Sia $a \neq 0$ un numero reale. Esiste il limite della successione definita ricorsivamente come $a_1 = a$, $a_n = \frac{1}{a_{n-1}}$?

2.3.3 Dato un capitale iniziale C_0 , investiamolo ad un tasso di interesse annuale t , e ripetiamo la stessa operazione tutti gli anni con il capitale che ci ritroviamo. Scrivere la legge ricorsiva della successione che definisce il capitale C_n all' n -esimo anno.

2.3.4 Il seguente problema fu proposto per primo da Leonardo Fibonacci (Pisa, 1170 – Pisa, 1240 ca.).

Una coppia di conigli genera ogni mese una coppia di piccoli, che a loro volta possono riprodursi ad un mese dalla nascita. Supponiamo per semplicità che ogni coppia di nuovi nati sia costituita da un maschio e da una femmina, e che si accoppino tra loro. I conigli non muoiono mai.

All'inizio ho solo una coppia di conigli ancora immaturi. Come evolve questa popolazione?

Indichiamo con f_n (usiamo la lettera f invece di a per ricordarci di Fibonacci) il numero di coppie di conigli al mese n . Allora:

- al primo mese, $f_1 = 1$ (i piccoli, ancora immaturi);
- al secondo mese $f_2 = 1$ (sempre loro, ma ora sono maturi);
- al terzo $f_3 = 2$ (hanno generato una coppia di piccoli);
- al quarto $f_4 = 3$ (i genitori hanno generato un'altra coppia di piccoli);
- al quinto $f_5 = 5$ (hanno generato anche i conigli nati il terzo mese)...

La successione di Fibonacci $\{f_n\}$ è definita per ricorrenza così, tramite *due* valori iniziali:

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \quad \text{per } n \geq 3. \quad (2.1)$$

La formula $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$ (un elemento della successione è la somma dei due precedenti) dice semplicemente che le coppie al mese n sono quelle del mese precedente (f_{n-1}) più i nuovi nati, che sono pari al numero di coppie fertili (f_{n-2}).

Calcolare i primi dieci termini della successione di Fibonacci.

2.4 Varia

2.4.1 Cercare due successioni $a_n \sim b_n$, a_n strettamente monotona e b_n non monotona.

2.4.2 E' $(0+)^{\infty}$ una forma indeterminata?

2.4.3 Dire se ha limite la successione $a_n = \sqrt[n]{(-1)^n n}$.

Capitolo 3

Serie numeriche

3.1 Definizioni

3.1.1 Per quali $q > 0$ si ha che $\sum_{k=0}^n q^k \geq 10$ definitivamente?

3.2 Serie a termini positivi

3.2.1 Studiare il comportamento delle serie

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n};$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{3^n};$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\frac{n}{2}}};$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log_b n}},$ con $b > 0, b \neq 1;$

(v) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right).$

3.2.2 Studiare il comportamento delle serie

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log n}};$

(ii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n};$

(iii) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^\alpha}$ con $\alpha > 0.$

3.2.3 Dimostrare che $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} = +\infty.$

3.2.4 Supponiamo che una palla, cadendo su di un pavimento orizzontale da una generica altezza di h metri, possa rimbalzare fino ad una altezza di rh metri, dove $0 < r < 1$. Supponiamo ora di lasciare cadere la palla da a metri e di lasciarla rimbalzare; ad ogni rimbalzo raggiungerà un'altezza sempre inferiore alla precedente e supponiamo che questi rimbalzi si ripetano all'infinito. Quale sarà la distanza totale percorsa dalla palla scendendo e risalendo? Qual è il risultato nel caso specifico $a = 1$ e $r = \frac{2}{3}$?

3.3 Serie a termini di segno qualsiasi

3.3.1 Studiare il comportamento delle serie

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin(3n)}{3^n};$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^n} \text{ per } q \neq -1;$$

3.3.2 Studiare il comportamento delle serie a termini di segno alterno

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n;$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[n]{n};$$

$$(iii) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{n};$$

$$(iv) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \log n}.$$

Capitolo 4

Funzioni di una variabile reale

4.1 Grafici, che passione!

Cercare di disegnare i grafici di questa sezione anche con MATLAB.

4.1.1 Rette e semipiani...

- (i) Disegnare le rette $y = -2x + 3$, $3x - 2y = 1$, $x = 1$.
- (ii) Disegnare le regioni di piano $\{2y < x + 1\} \cap \{x < -3y + 1\}$.
- (iii) Rappresentare il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ come intersezione di tre semipiani.
- (iv) Dedurre le espressioni analitiche delle rette in Figura 4.1.

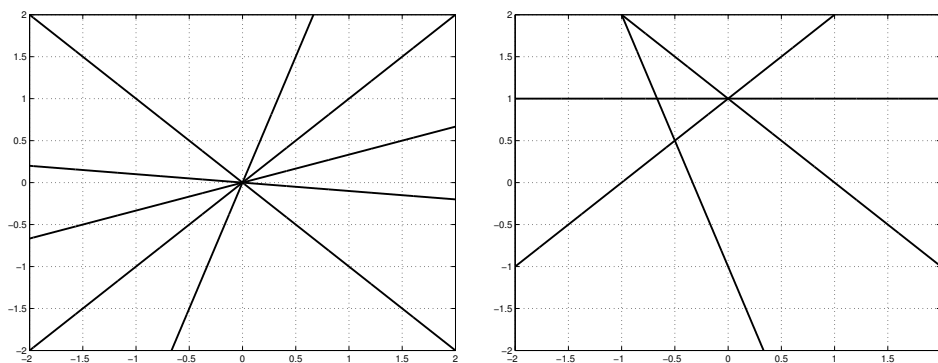


Figura 4.1: Rette.

4.1.2 Parabole...

- (i) Disegnare $y = x^2$, $3x^2$, $\frac{1}{3}x^2$, $2(x - 1)^2$, $-3(x + 2)^2$.
- (ii) Dedurre le espressioni analitiche delle parabole in Figura 4.2.

4.1.3 Disegnare i grafici di

- (i) $H(x + 1) \cdot H(1 - x)$;
- (ii) $\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - 1)$.

4.1.4 Disegnare in uno stesso piano i grafici di

- (i) e^{x^2} , e^{-x^2} ;
- (ii) e^{-ax} , con $a = 1, 2, 3$;
- (iii) $x^{1/2}$, $x^{3/4}$, $x^{4/3}$, $x^{5/3}$.

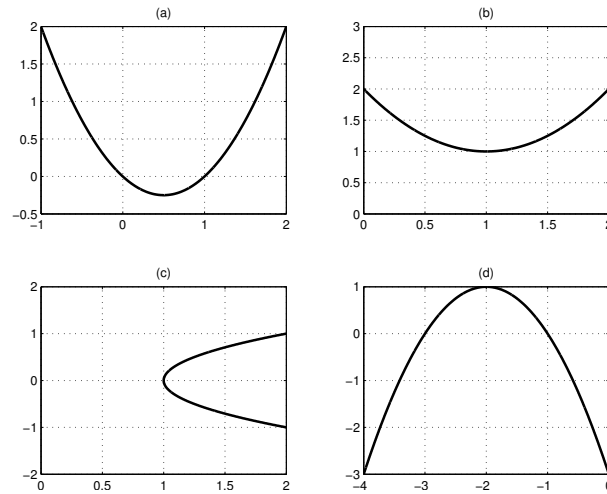


Figura 4.2: Parabole.

4.1.5 Disegnare i grafici delle funzioni $1 + x^2 + \sin x$, $2 - x \sin x$, $x^2 - x$, $e^x \log x$, $e^x - \log x$.

4.1.6 Disegnare i grafici di

(i) $|\log |x||$;

(ii) $\frac{1}{1 + x^2}$.

4.1.7 Di quali funzioni sono grafici le curve in Figura 4.3?

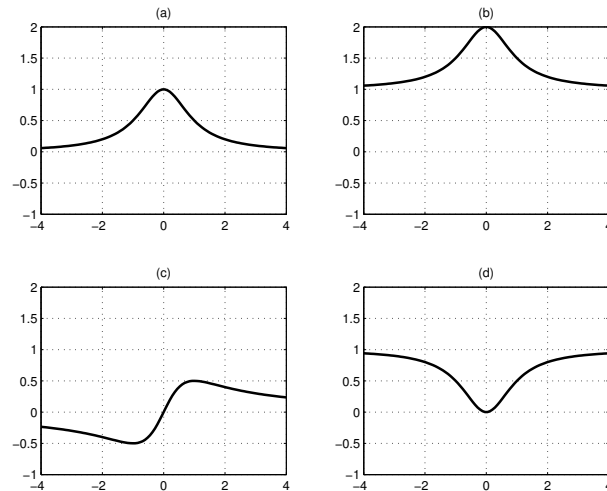


Figura 4.3: Grafici.

4.1.8 Disegnare il grafico delle funzioni

(i) $||x - 1| - 1|$;

(ii) $f(x) = \max\{\sin x, \cos x\}$ in $[-\pi, \pi]$;

(iii) $g(x) = \max_{-\pi \leq t \leq x} \sin t$, in $[-\pi, \pi]$.

(iv) $h(x) = \max\{\min\{x, b\}, a\}$.

4.1.9 E' vero che il grafico della funzione $f(ax + x_0)$ si deduce da quello di $f(ax)$ per traslazione di x_0 ?

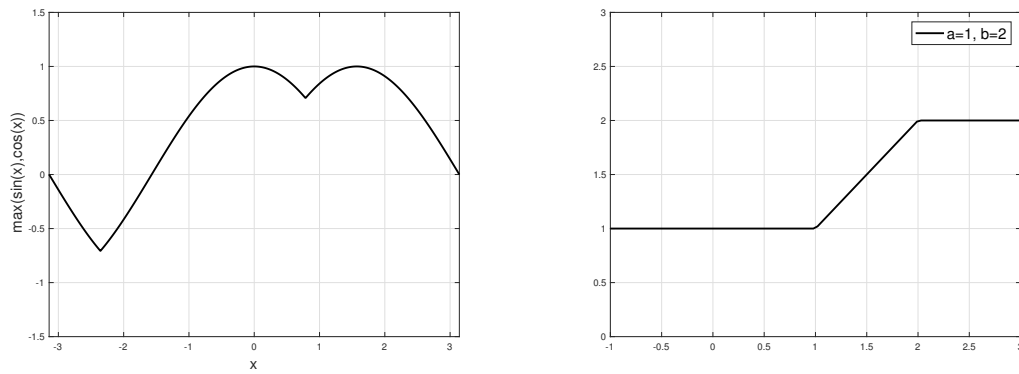


Figura 4.4: Grafici.

4.1.10 Prendiamo (con le dovute precauzioni...) un campione di un elemento radioattivo, e sia N_0 il numero di nuclei radioattivi presenti nel nostro campione. La legge del decadimento radioattivo stabilisce che dopo un tempo t il numero di nuclei radioattivi si sarà ridotto a

$$N(t) = N_0 e^{-kt},$$

dove k è una costante positiva che dipende dal materiale considerato. L'*emivita* di un elemento radioattivo è il tempo necessario per il decadimento della *metà* dei nuclei radioattivi presenti in un campione. Calcolare l'emivita dalla legge precedente e osservare che non dipende dal numero N_0 .

4.2 Campo di esistenza

4.2.1 Determinare il campo di esistenza di

- (i) $\log(\log x)$;
- (ii) $\log_{\log x} x$;
- (iii) $\sqrt{1 - \sqrt{x}}$;
- (iv) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 5x + 6}}$;
- (v) $\arcsin(x^3 + 1)$;
- (vi) x^x ;
- (vii) $x^{\log x}$;
- (viii) $(\log x)^x$.

4.3 Composizione

4.3.1 Composizione:

- (i) calcolare $f \circ g$ e $g \circ f$ dove $f(x) = \sqrt{1 - x}$, $g(x) = \log x$;
- (ii) sia $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Calcolare $f \circ f$ e $f \circ f \circ f$.

4.3.2 Calcolare il campo di esistenza e disegnare il grafico delle funzioni $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ e $g(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

4.4 Funzioni simmetriche

4.4.1 Dire se le seguenti funzioni sono pari, dispari o non sono simmetriche:

- (i) $\arcsin x$,
- (ii) $\arccos x$,
- (iii) $\arccos x - \frac{\pi}{2}$,
- (iv) $\sin(x^3)$,
- (v) $\cos(x^3)$.

4.5 Funzioni periodiche

4.5.1 Calcolare il periodo di $\sin(\omega x)$, $\sin(\omega x + \phi)$, dove $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\phi \in \mathbb{R}$.

4.5.2 Calcolare il periodo delle funzioni $(\sin x)^2$, $|\cos x|$.

4.5.3 Calcolare il periodo di $\sin(px) + \cos(qx)$, con $p, q \in \mathbb{Q}$.

4.5.4 Sono periodiche le funzioni $e^x \sin x$ (lunghezza d'onda), $\frac{\sin x}{x}$, $\sin(3x - 2)$?

4.5.5 Dare un esempio di una funzione pari, positiva, periodica di periodo 3.

4.5.6 Dire se le funzioni $e^{\sin x}$ e $\sin(\sin x)$ sono periodiche e disegnarne un grafico approssimativo.

4.5.7 Dimostrare che la funzione $\sin(x^2)$ non è periodica.

4.6 Funzioni monotone, invertibili, inverse

4.6.1 Dimostrare che la somma di due funzioni monotone dello stesso tipo (ad esempio, entrambe crescenti o entrambe strettamente decrescenti) è ancora una funzione monotona dello stesso tipo.

4.6.2 Dimostrare con un esempio che il prodotto di due funzioni monotone dello stesso tipo non è necessariamente una funzione monotona.

4.6.3 Dimostrare che il prodotto di due funzioni monotone dello stesso tipo e strettamente positive è ancora una funzione monotona dello stesso tipo.

4.6.4 Siano f e g due funzioni monotone (crescenti o decrescenti, non necessariamente dello stesso tipo). Studiare il tipo di monotonia della funzione composta $g \circ f$.

4.6.5 E' decrescente la funzione $\frac{1}{x}$?

4.6.6 Può una funzione pari essere invertibile? Può una funzione dispari essere invertibile?

4.6.7 Calcolare dominio e immagine della funzione $f(x) = 2 \arcsin(3x - 2)$. Disegnare un grafico approssimativo di f .

4.6.8 Dire se le seguenti funzioni sono invertibili e, in caso affermativo, calcolare la funzione inversa: $e^x - 1$, $3 - x^5$.

4.6.9 Calcolare, se esiste, la funzione inversa di

- (i) $\frac{1}{1-x}$;
- (ii) $\tanh x$;
- (iii) $\sqrt{1 + \log x}$;
- (iv) $\log_2(\log_3 x)$;
- (v) $|x|x$.

Capitolo 5

Limiti di funzioni e continuità

5.1 Limiti: fatti basilari

5.1.1 Dimostrare, usando la definizione di limite, che

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0;$

(ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{2}} x = -\infty.$

5.1.2 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = -x$ se $x < 0$, $f(0) = 1$, $f(x) = x^2$ se $x > 0$. Disegnare il grafico di f , studiarne il limite in 0, discuterne la continuità.

5.1.3 Sia $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\frac{1}{n}) = 0$; è allora vero o falso che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$?

5.2 Asintotici

5.2.1 Trovare degli asintotici semplici per $x \rightarrow 0$ delle funzioni

$$\operatorname{tg} x, \operatorname{cotg} x, \operatorname{arctg} x, \operatorname{arcsin} x.$$

5.2.2 Studiare tramite gli asintotici la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

5.3 Calcolo di limiti

5.3.1 Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \log\left(\frac{x+1}{x+2}\right).$

5.3.2 Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^x.$

5.3.3 Calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{x+\frac{1}{x}}}{1+x^2}.$

5.3.4 Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\log x)}{1+\log x}.$

5.3.5 Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\log(1+2x^2)}.$

5.3.6 Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{2}{x}}.$

5.3.7 Calcolare

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\sin \frac{1}{x}}.$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\sin x}.$$

5.4 Di tutto un po'

5.4.1 Delle seguenti funzioni calcolare il campo di esistenza, limiti nei punti significativi, asintoti, asintotici nei punti significativi:

$$(i) \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2};$$

$$(ii) \operatorname{arctg} \left(\frac{x + 2}{x + 1} \right);$$

$$(iii) x \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right);$$

$$(iv) x e^{-\frac{1}{x}};$$

$$(v) \log \left(\frac{2x+1}{x^2+x-2} \right).$$

5.4.2 Dimostrare che non esiste né il $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos x$ né il $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin(\frac{1}{x})$.

5.4.3 Cercare due funzioni f e g tali che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ ma non esiste il $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$.

5.5 Continuità

5.5.1 Sia $f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1$ se $x \in [0, 1]$ e $f(x) = 2$ se $x \in [2, 3]$. E' continua la funzione f ?

5.5.2 Dire se le seguenti funzioni sono prolungabili per continuità in 0:

$$x \log x, \quad e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

5.6 I teoremi relativi alla continuità

5.6.1 Dare un esempio di una funzione continua in $[0, 1]$ che abbia un numero infinito di punti di massimo e di minimo in $[0, 1]$.

5.6.2 Una funzione f continua in (a, b) è necessariamente limitata?

5.6.3 Dimostrare che l'equazione $\operatorname{tg} x + e^x - 5 = 0$ ha almeno una soluzione in $(-\pi/2, \pi/2)$.

5.6.4 Dimostrare che la funzione $x^3 e^{-x^2}$ ha massimo e minimo in $\mathbb{R}$.

Capitolo 6

Calcolo differenziale

6.1 Generalità

6.1.1 Cosa succede cambiando un segno nella definizione di derivata? Dimostrare che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h} = -f'(x_0).$$

6.1.2 E se facessimo $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$?

6.1.3 Dimostrare che f pari $\Rightarrow f'$ dispari, f dispari $\Rightarrow f'$ pari.

6.2 Calcolo di derivate

6.2.1 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni (operazioni fondamentali):

$$x^3 + 3x, \quad x^{3/2} - x^{-1/3}, \quad x \log x, \quad e^x \sin x, \quad \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

6.2.2 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni (composizione):

$$e^{-x^2}, \quad 2^{\sqrt{x}}, \quad \log(\log x), \quad 2^{3^x}, \quad (\log x)^{\log x}.$$

6.2.3 Dimostrare il seguente risultato, usato per motivare la formula di derivazione della funzione inversa: se le rette $y = m_1x + q_1$ e $y = m_2x + q_2$, con $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$, sono simmetriche rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, allora $m_1m_2 = 1$.

6.2.4 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\log(2x), \log_2 |5x|, \arctg\left(\frac{x}{3}\right), \cos(x^4), \cos^4(x), \log\left|\frac{x+1}{2-x}\right|, \arctg\left(\frac{x-1}{2+x^2}\right), \\ e^{-2x^3}, 3^{x^2+2x}, x^{\log x}, x^{\frac{1}{x}}.$$

6.2.5 Calcolare $D^n \frac{1}{x}$.

6.2.6 Dimostrare che $D \tanh x = 1 - \tanh^2 x$.

6.2.7 Dimostrare che $D \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2}$.

6.3 Rette tangenti

6.3.1 Calcolare la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$, dove

(i) $f(x) = \log x$, $x_0 = 1$;

(ii) $f(x) = 2^x$, $x_0 = 0$.

6.3.2 Calcolare le equazioni delle rette tangenti al grafico di $f(x) = x^2$ passanti per il punto $P_0 = (0, -a^2)$, con $a \geq 0$.

6.4 Mica sempre derivabili...

6.4.1 Dire se le funzioni seguenti sono derivabili in 0 e in caso negativo specificare il tipo di non derivabilità: $|x|^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{5}}$, $x^{\frac{4}{3}}$. Dire per quali $\alpha \geq 0$ la funzione $|x|^\alpha$ è derivabile in 0, classificando i tipi di non derivabilità.

6.4.2 Studiare i punti di non derivabilità di

(i) $e^{|x|}$;

(ii) $|x^2 - 1|$;

(iii) $\sqrt[3]{|x|}$;

(iv) $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

(v) $\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}$.

6.4.3 Prolungare per continuità la funzione f , definita in $(0, +\infty)$, a 0 e quindi calcolare $f'_+(0)$:

(i) $f(x) = x \log x$;

(ii) $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

6.5 Inverse

6.5.1 Dimostrare che $f(x) = x + \log x$ è invertibile e calcolare $(f^{-1})'(1)$.

6.6 Varia umanità

6.6.1 Dare un esempio di una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f < 0$ ma $f' > 0$.

6.6.2 Si considerino i grafici delle funzioni rappresentati in Figura 6.1. Disegnare il grafico delle loro derivate. Quali potrebbero essere le funzioni i cui grafici appaiono in figura?

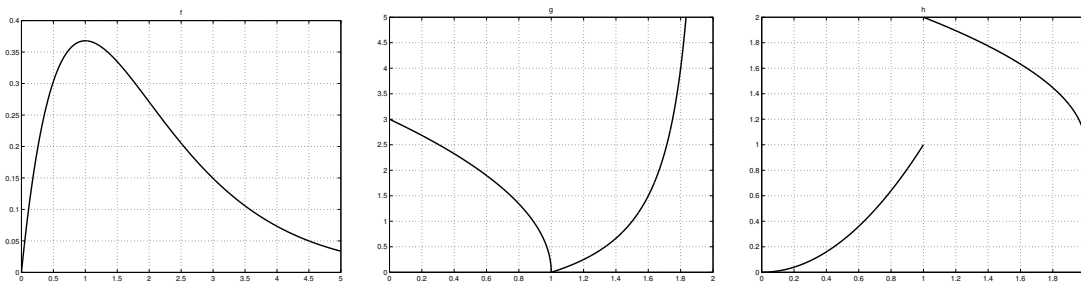


Figura 6.1: Grafici di funzioni.

6.6.3 Dare un esempio di una funzione f tale che, per $x \rightarrow +\infty$, si ha che $f(x) \rightarrow 0$ ma $f'(x) \not\rightarrow 0$. Disegnarne un grafico approssimativo.

Dare un esempio di una funzione g tale che, per $x \rightarrow +\infty$, si ha che $g'(x) \rightarrow 0$ ma $g(x) \not\rightarrow 0$. Disegnarne un grafico approssimativo.

Pertanto, per $x \rightarrow +\infty$,

$$f \rightarrow 0 \not\Rightarrow f' \rightarrow 0.$$

6.7 C^n

6.7.1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = ax + b$ se $x \leq 0$ e $f(x) = e^x$ se $x > 0$. Dire per quali valori di a e b la funzione è derivabile. Per tali valori è f di classe C^1 ?

6.7.2 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^2$ se $x \leq 0$ e $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x > 0$. Dire se è di classe $C^2(\mathbb{R})$.

6.7.3 Dare un esempio di una funzione di classe C^n ma non di classe C^{n+1} .

6.7.4 Si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

per $n = 0, 1, 2, \dots$. A quali classi di funzioni derivabili appartengono?

6.8 Concavità e convessità

6.8.1 Dare un esempio di una funzione f convessa con f^{-1} convessa e di una funzione f convessa con f^{-1} concava. Ciò prova che dalla convessità di f non si può dedurre nulla a proposito della convessità (o concavità) di f^{-1} (a differenza della monotonia).

6.9 Grafici

6.9.1 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = x^2 e^x$;

(ii) $g(x) = \sqrt[3]{x} e^x$ (non è richiesto lo studio della derivata seconda);

(iii) $h(x) = x^3 + x^2 - x + 1$.

6.9.2 Disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 e^{-x}$.

6.9.3 Disegnare il grafico della funzione $g(x) = \left| \frac{x^2 + x - 2}{x + 3} \right|$.

6.9.4 Disegnare il grafico della funzione $h(x) = e^{\frac{3}{\log x}}$.

6.9.5 Disegnare il grafico della funzione $k(x) = \frac{x}{4} + \operatorname{arctg} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)$.

6.9.6 Disegnare i grafici delle seguenti funzioni:

(i) $f(x) = \frac{|x^2 - x - 2|}{x^2}$;

(ii) $g(x) = x \sqrt[3]{\log^2 |x|}$;

(iii) $h(x) = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$.

6.10 Applicazione: problemi di ottimizzazione

6.10.1 Vogliamo costruire una scatola quadrata, senza coperchio, a partire da un foglio quadrato di lamiera di lato a . Per far questo dobbiamo ritagliare dei quadrati di lato $x < a/2$ dagli angoli del foglio di lamiera e poi ripiegare ad angolo retto lungo i lati; si veda la Figura 6.2. Di quale dimensione devono essere i quadrati ritagliati per rendere massima la capienza della scatola? Disegnare il grafico del volume della scatola in funzione di x .

6.10.2 Si vuole progettare una lattina di alluminio da un litro, avente la forma di un cilindro retto (di raggio di base r e altezza h), in modo che il consumo di alluminio necessario per la costruzione sia il minore possibile. Quali devono essere le dimensioni della lattina?

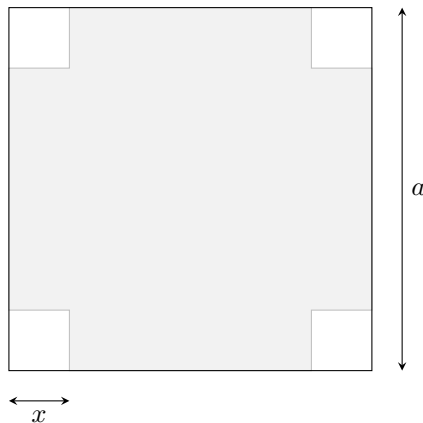


Figura 6.2: Il foglio quadrato di lamiera di lato a e, in grigio, la parte con cui costruire la scatola.

6.11 I Teoremi di de l'Hospital

6.11.1 Calcolare con gli asintotici e quindi con la regola di de l'Hospital il

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 2 \cos x - 3}{\sin x}.$$

6.11.2 Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2 \operatorname{tg} x}.$$

6.11.3 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile e supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1$. E' vero che f ha un asintoto a $+\infty$?

6.11.4 E' vero che $e^{x^2} - \cos x \sim e^{x^2} - 1$ per $x \rightarrow 0$?

6.12 Polinomi e formula di Taylor

6.12.1 Calcolare i polinomi di MacLaurin di ordine n delle funzioni $\sinh x$ e $\cosh x$.

6.12.2 Scrivere alcuni termini dello sviluppo di MacLaurin di

$$\sin(x^2), \quad \sqrt{1-x},$$

deducendoli da quelli di $\sin x$ e $(1+x)^\alpha$.

6.12.3 Ricordando gli sviluppi di MacLaurin di e^x e di $\sin x$, scrivere il polinomio di MacLaurin di grado 4 di $e^{\sin x}$.

6.12.4 Calcolare il polinomio di MacLaurin di grado 3 della funzione $\operatorname{tg} x$.

6.12.5 Usando i polinomi di MacLaurin trovare un asintotico per $x \rightarrow 0$ della funzione $f(x) = \sin x^2 - (\sin x)^2$.

6.12.6 Calcolare lo sviluppo di Taylor all'ordine 2 della funzione $f(x) = \log(\cos x)$ nel punto $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

6.12.7 Ricordando l'Esercizio 6.1.2, qual è l'errore che si commette rimpiazzando $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ con $f'(x_0)$? E rimpiazzando $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ con $f'(x_0)$?

6.12.8 Trovare una funzione f tale che $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$ e tracciarne un grafico approssimativo.

6.12.9 Studiare con MATLAB i polinomi di Taylor di qualche funzione e valutare visivamente l'errore commesso nell'approssimazione del polinomio con la funzione.

Capitolo 7

Calcolo integrale

7.1 Integrali come aree

7.1.1 Calcolare $\int_{-1}^2 |x(x-1)| dx$ disegnando dapprima il grafico della funzione integranda e poi ragionando per simmetria.

7.2 Varie semplici primitive

7.2.1 Calcolare, integrando per parti,

(i) $\int x^2 \sin x dx;$

(ii) $\int x \cosh(2x) dx.$

7.2.2 Risolvere, integrando per sostituzione, i seguenti integrali:

(i) $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx;$

(ii) $\int_1^e \frac{\log x}{x(1 + \log x)} dx;$

(iii) $\int x e^{-x^2} dx;$

(iv) $\int \sin \sqrt{x} dx.$

7.2.3 Risolvere i seguenti integrali ricordando le formule per l'integrazione di $\int \frac{f'}{f} dx$ e $\int f^\alpha f' dx$:

(i) $\int \cotg x dx ;$

(ii) $\int x^3 (2 + x^4)^3 dx ;$

(iii) $\int \sqrt{1 + \sin x} \cos x dx ;$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 2}} dx;$

(v) $\int_0^1 x \sqrt{1 - x^2} dx.$

7.2.4 Risolvere i seguenti integrali integrando prima per parti e poi ricordando le formule per l'integrazione di $\int \frac{f'}{f} dx$ e $\int f^\alpha f' dx$:

$$(i) \int \operatorname{arctg} x \, dx;$$

$$(ii) \int \arcsin x \, dx.$$

$$\mathbf{7.2.5} \text{ Calcolare } \int (2x+1)^3 \, dx, \int (2x^2+1)^3 \, dx, \int x(2x^2+1)^3 \, dx.$$

$$\mathbf{7.2.6} \text{ Calcolare } \int_0^1 e^{\sqrt[3]{x}} \, dx.$$

7.3 Funzioni razionali

7.3.1 Nell'integrazione delle funzioni razionali, nel caso in cui Q non ha radici reali, si è sfruttato il fatto che se P ha grado minore od uguale ad uno e Q ha grado due, allora esistono delle costanti c_1 e c_2 tali che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = c_1 \frac{Q'(x)}{Q(x)} + c_2 \frac{1}{Q(x)}.$$

Provarlo rigorosamente.

7.3.2 Calcolare

$$(i) \int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx;$$

$$(ii) \int \frac{x^2}{x+3} \, dx.$$

7.3.3 Calcolare

$$(i) \int \frac{x+3}{(x+1)^2} \, dx;$$

$$(ii) \int x \log(x+3) \, dx;$$

$$(iii) \int \frac{1}{\sinh x} \, dx.$$

7.3.4 Calcolare

$$(i) \int \frac{2}{x^3 - 3x^2 + 2x} \, dx;$$

$$(ii) \int \frac{2x+1}{x^2(x+1)} \, dx;$$

$$(iii) \int \frac{1}{1+x^3} \, dx;$$

$$(iv) \int \frac{1}{x(x^2+2)} \, dx;$$

$$(v) \int \frac{1}{x^2(x+3)} \, dx;$$

$$(vi) \int \frac{1}{x^2+x^4} \, dx.$$

7.4 Funzioni trigonometriche

7.4.1 Calcolare $\int (1 + \sin x)^3 \sin(2x) dx$.

7.4.2 Calcolare $\int \sin^4 x dx$, $\int \cos^5 x dx$.

7.4.3 Calcolare $\int \sin(3x) \cos(2x) dx$.

7.4.4 Calcolare $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 + \sin x} dx$.

7.4.5 Dimostrare che se $\alpha \neq 0$ allora

$$\begin{aligned} \int_0^a \sin(\alpha x) e^{-\beta x} dx &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left[1 - e^{-a\beta} \left(\cos(a\alpha) + \frac{\beta}{\alpha} \sin(a\alpha) \right) \right], \\ \int_0^a \cos(\alpha x) e^{-\beta x} dx &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\frac{\beta}{\alpha} + e^{-a\beta} \left(\sin(a\alpha) - \frac{\beta}{\alpha} \cos(a\alpha) \right) \right]. \end{aligned}$$

7.4.6 Si consideri l'integrale $\int \sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}} dx$. Sembra ragionevole fare il cambiamento di variabili $t = \sin x$ ma ...

7.5 Aree di regioni piane

7.5.1 Calcolare l'area della regione limitata compresa tra la parabola $y = x^2 + 3x - 1$ e l'iperbole $xy = 3$.

7.5.2 Calcolare l'area della regione piana limitata dalle funzioni $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \frac{x}{2-x}$.

7.6 Funzioni integrali

7.6.1 Sia f una funzione continua in $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}_0$ la sua funzione integrale relativa al punto 0. Dimostrare che

$$f \text{ pari} \Rightarrow \mathcal{F}_0 \text{ dispari}, \quad f \text{ dispari} \Rightarrow \mathcal{F}_0 \text{ pari}.$$

7.6.2 Sia $f(x) = e^x$. Disegnare in uno stesso sistema di riferimento i grafici delle funzioni $\mathcal{F}_{-1}$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$.

7.6.3 Sia $f(x) = \sin x$. Disegnare in uno stesso sistema di riferimento i grafici delle funzioni f e $\mathcal{F}_0$. Interpretare il secondo in termini di area. Analogo esercizio nel caso di $f(x) = \cos x$.

7.7 Notazioni e dimensioni

7.7.1 Stabilire le dimensioni di a e b nell'espressione

$$\log(ab) = \log a + \log b.$$

7.7.2 E' corretta dimensionalmente la formula

$$D \cos(ax^2 + b) = -(2ax + b) \sin(ax^2 + b)?$$

Dove sta l'errore?

7.7.3 Sono corrette dimensionalmente le formule

$$D \log(ax) = \frac{1}{ax} \quad \text{e} \quad D \log(ax) = \frac{a}{x}?$$

Dove sta l'errore?

7.7.4 Sapendo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$$

dire quali delle seguenti formule sono dimensionalmente plausibili:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \begin{cases} \sqrt{\pi a}, \\ \sqrt{\pi/a}, \\ \sqrt{\pi}/a, \\ \sqrt{\pi a}. \end{cases}$$

Quale è il risultato corretto? Si noti che $\sqrt{100\text{m}^2} = 10\text{m}$ ha senso (si pensi al Teorema di Pitagora).

7.8 Integrali di funzioni discontinue

7.8.1 Calcolare $\int_0^3 x[x] dx$.

7.8.2 Vero o falso che $\int \text{sgn}(x) dx = |x| + C$? In altre parole, è $|x|$ una primitiva di $\text{sgn}(x)$?

7.9 Integrali generalizzati

In tutti gli esercizi seguenti tracciare un grafico approssimativo delle funzioni integrande negli intervalli specificati dagli integrali.

7.9.1 Calcolare i seguenti integrali generalizzati ($a > 0$):

(i) $\int_0^1 x \log x dx;$

(ii) $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx;$

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

7.9.2 Quali dei seguenti integrali generalizzati sono convergenti?

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x \log x} dx, \quad \int_{1/2}^1 \frac{1}{x \log x} dx, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx.$$

7.9.3 Dimostrare che l'integrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ è convergente utilizzando i criteri di convergenza, specificando in che senso è da interpretare; calcolarlo.

7.9.4 Dire se i seguenti integrali sono convergenti usando i criteri di convergenza e disegnare un grafico approssimativo delle funzioni integrande:

(i) $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x^2} dx;$

(ii) $\int_0^1 \frac{1 - e^{-x}}{x^{3/2}} dx;$

(iii) $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2} dx.$

7.9.5 Dare un esempio di una funzione $f \geq 0$ che non tende a 0 per $x \rightarrow +\infty$ ma tale che $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ è convergente.

Dimostrare quindi che se $f \geq 0$, se esiste $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ e infine se $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ è convergente, allora $l = 0$.

7.9.6 Studiare la funzione $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

7.9.7 Studiare la funzione $h(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2} dt$.

Bibliografia

- [1] M. Bramanti. *Esercitazioni di Analisi Matematica 1*. Esculapio, 2013.
- [2] M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa. *Analisi Matematica 1*. Zanichelli, 2008.
- [3] B.P. Demidovich. *Esercizi e problemi di analisi matematica*. Editori Riuniti, 2003.
- [4] E. Giusti. *Esercizi e complementi di analisi matematica. Volume 1*. Bollati Boringhieri, 1991.
- [5] I.S. Gradshteyn e I.M. Ryzhik. *Table of integrals, series, and products*. Academic Press, 1994.
- [6] J. Marsden e A. Weinstein. *Calculus I*. Springer, 1985.
- [7] S. Salsa e A. Squellati. *Esercizi di Analisi matematica 1*. Zanichelli, 2011.