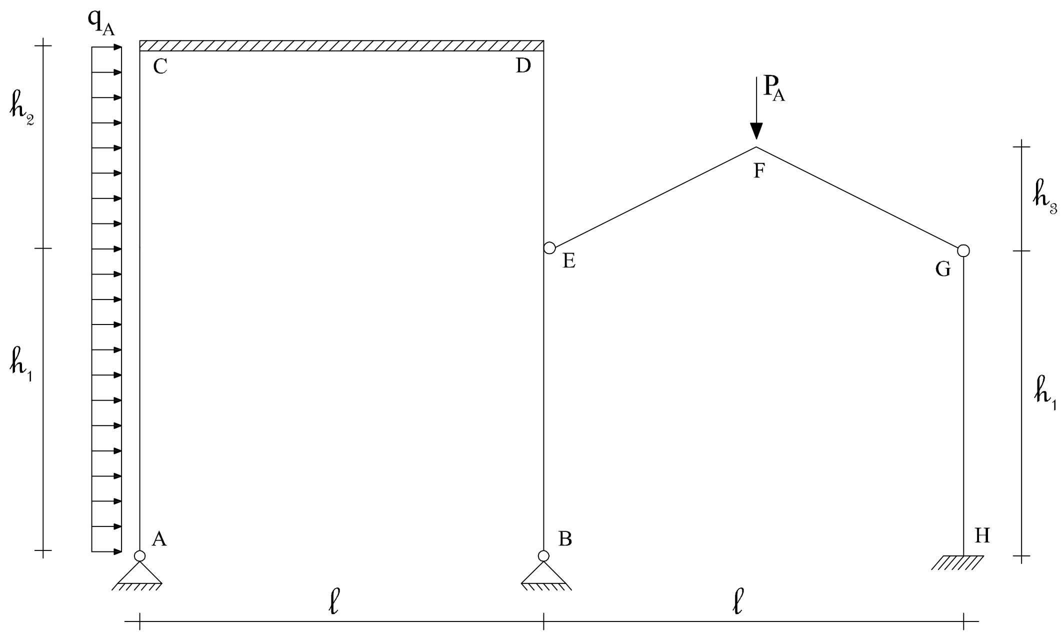
Università di Ferrara

Facoltà di Ingegneria

Corso di Laurea in Ingegneria Civile

Prova Totale di Scienza delle Costruzioni   12/06/2013

FILA A



ℓ = 8 m

h_1 = 6 m

h_2 = 4 m

h_3 = 2 m

q_A = 30 kN/m

P_A =100 kN

E = 210000 N/mm^2

σ_{amm} = 260 N/mm^2

$\alpha = 1,2 \times 10^{-5}\,°C^{-1}$

A) Risolvere la struttura in Figura (è consentito trascurare le deformabilità assiali delle aste), si assume il tratto CD infinitamente rigido;

B) Disegnare i diagrammi delle azioni interne (N, T, M);

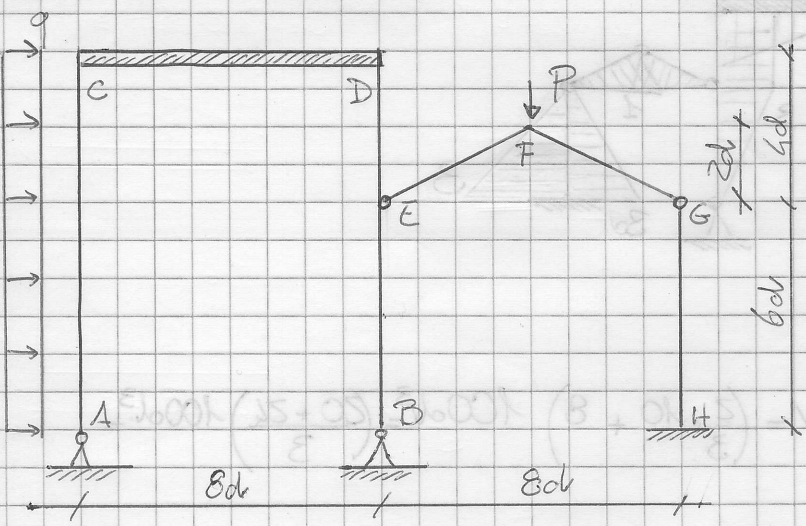
C) Progettare la struttura mediante profilati a sezione rettangolare;

D) Calcolare lo spostamento verticale in F;

E) Verificare gli effetti di un carico di temperatura To = 50°C sul coperto EFG;

F) Verificare la sezione ove il modulo del momento flettente è massimo.

Fila A



$d = 1\,m$

$q = 30\,kN/m$

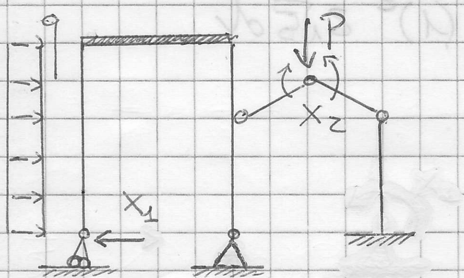
$P = 100\,kN = 10/3\,qd$

$E = 210\,GPa$

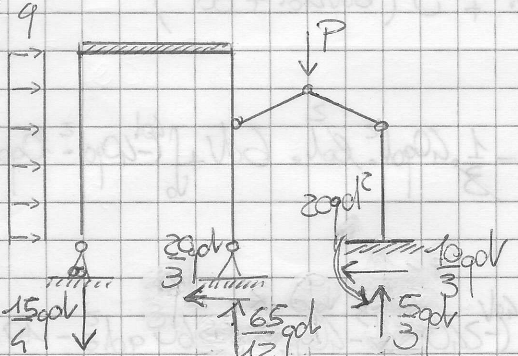
$\sigma_{amm} = 260\,MPa$

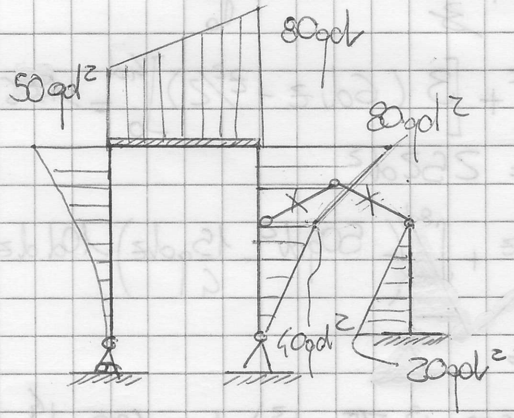
$\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}\,°C^{-1}$

a) Utilizzo il metodo delle forze

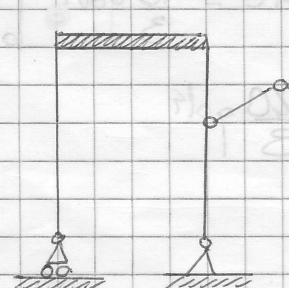


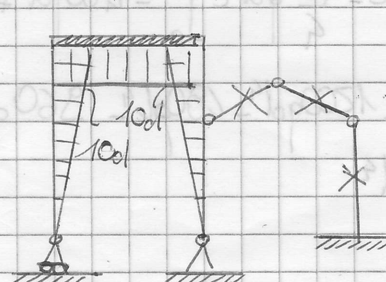
(0)



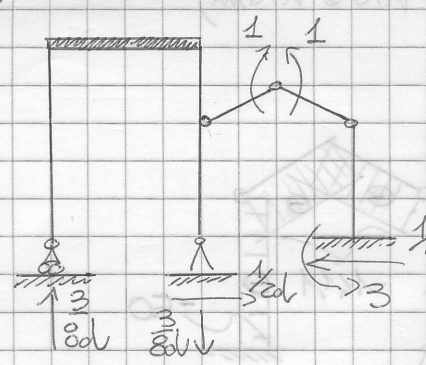


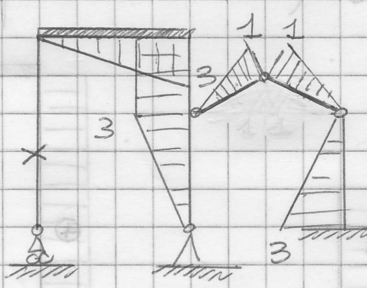
(1)





(2)





Calcolo dei coefficienti η_{ij}

$$EJ\eta_{11} = \frac{1}{3}(10d)^2 \cdot 10d \cdot 2 = \frac{2000}{3}d^3$$

$$EJ\eta_{22} = \frac{1}{\cancel{3}}(3)^2\, 6d \cdot 2 + (3)^2 \cdot 4d + \frac{1}{3}(1)^2\, 2\sqrt{5}d \cdot 2 = \left(72 + \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)d$$

$$EJ\eta_{12} = \frac{1}{\cancel{3}}(6d)\cdot 6d \cdot \cancel{3} + \int_0^{4d}(6d+z)\,3\,dz = 36d^2 + 3\left[6dz + \frac{z^2}{2}\right]_0^{4d} = 36d^2 + 3\left(24d^2 + 8d^2\right) =$$

$$= 132\, d^2$$

$$EJ\eta_{10} = \int_0^{10d}\left(-q\frac{z^2}{2}\right) z\,dz + \int_0^{4d}(-40qd^2 - 10qdz)(6d+z)\,dz - \frac{1}{\cancel{3}}6d \cdot 40qd^2 \cdot 6d =$$

$$= \left[-q\frac{z^4}{8}\right]_0^{10d} + \int_0^{4d}(-240qd^3 - 40qd^2z - 60qd^2z - 10qdz^2)\,dz - 480qd^4 =$$

$$= -1250qd^4 - \left[240qd^3z - 50qd^2z^2 - \frac{10}{3}qdz^3\right]_0^{4d} - 480qd^4 =$$

$$= -1250qd^4 - 960qd^4 - 800qd^4 - \frac{640}{3}qd^4 - 480qd^4 = -\left(3490 + \frac{640}{3}\right)qd^4$$

$$EJ\eta_{20} = \frac{1}{\cancel{3}}\, 20qd^2 \cdot \cancel{3} \cdot 6d - \frac{1}{\cancel{3}}\, 40qd^2 \cdot \cancel{3} \cdot 6d - \int_0^{4d}(+40qd^2 + 10qdz)\,3\,dz =$$

$$= 120qd^3 - 240qd^3 - 3\left[40qd^2z + 5qdz^2\right]_0^{4d} =$$

$$= -120qd^3 - 480qd^3 - 240qd^3 = -840qd^3$$

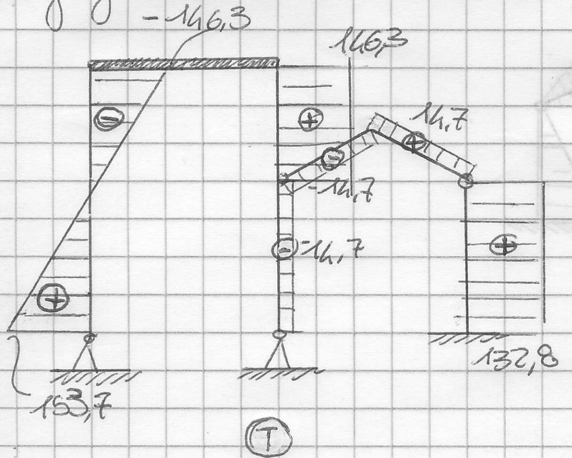
Sistema finale

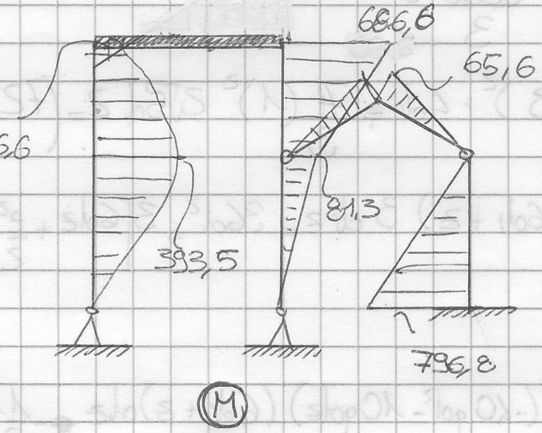
$$\begin{bmatrix} \frac{2000}{3}d^3 & 132d^2 \\ 132d^2 & \left(72 + \frac{4\sqrt{5}}{3}\right)d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(3490 + \frac{640}{3}\right)qd^4 \\ 840qd^3 \end{bmatrix}$$

$X_1 = 153{,}7$ kN

$X_2 = 65{,}6$ kNm

Ⓑ Grafici dell'azione interna (i valori sono espressi in KN e KNm)



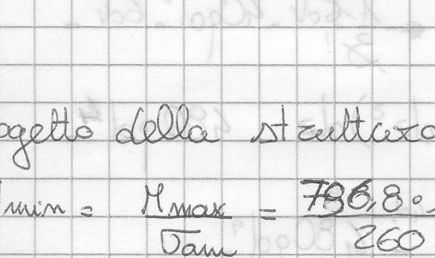


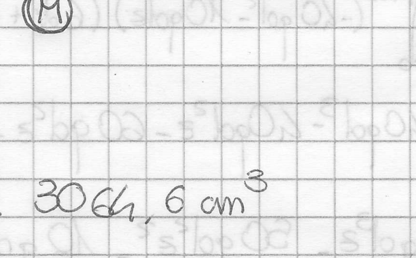
Ⓒ Progetto della struttura:

$$W_{min} = \frac{M_{max}}{\sigma_{am}} = \frac{796,8 \cdot 10^3}{260} = 3064,6\ cm^3$$

Non posso usare sezioni rettangolari, quindi utilizzo una sezione HEB 450.

Ⓓ Per il calcolo dello spostamento in F applico una forza unitaria verticale in F e risolvo la struttura. Siccome il sistema (1) e (2) sono uguali a quelli calcolati al punto ⓐ, calcolo solamente le sollecitazioni nel sistema O





$$\eta_{10} = \frac{1}{\cancel{3}} \cancel{6}^{2} (6d)^2 + \int_0^{4d} 6(6d+z)\,dz$$

$$= 72d^2 + 6\left(6d \cdot 4d + \frac{16d^2}{2}\right) = 264d^2$$

$$\eta_{20} = \frac{2}{\cancel{3}}(6d)\cancel{3} \cdot 6 + 4d \cdot 6 \cdot 3 = 144d$$

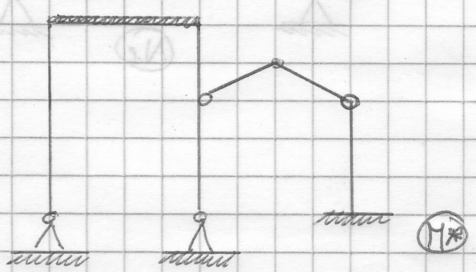
Sistema risolvente

$$\begin{bmatrix} \frac{2000}{3}d^3 & 132d^2 \\ 132d^2 & \left(72+\frac{4\sqrt{5}}{3}\right)d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -264d^2 \\ -144d \end{bmatrix}$$

$X_1 = -0,024$ KN

$X_2 = -1,878$ KNm

Da cui si ha il seguente grafico del momento



A questo punto applicando il PLV è possibile andare al calcolo dello spostamento in F

$$v_F = \int_{\Omega} M^* \cdot \frac{M}{EJ} \, dz$$

dove M è il momento flettente calcolato al punto Ⓑ.

Ⓔ Per considerare il carico Termico To sarà necessario calcolare i coefficienti η_{10}^T e η_{20}^T:

$$\eta_{10}^T = \int_0^{2\sqrt{5}d} N_{EF}^{①} \varepsilon_{EF}^T \, dz + \int_0^{2\sqrt{5}d} N_{FG}^{①} \varepsilon_{FG}^T \, dz = \ldots = 2\sqrt{5}d\left(N_{EF}^{①} + N_{FG}^{①}\right)\alpha T_0$$

$$\eta_{20}^T = \int_0^{2\sqrt{5}d} N_{EF}^{②} \varepsilon_{EF}^T \, dz + \int_0^{2\sqrt{5}d} N_{FG}^{②} \varepsilon_{FG}^T \, dz = \ldots = 2\sqrt{5}d\left(N_{EF}^{②} + N_{FG}^{②}\right)\alpha T_0$$

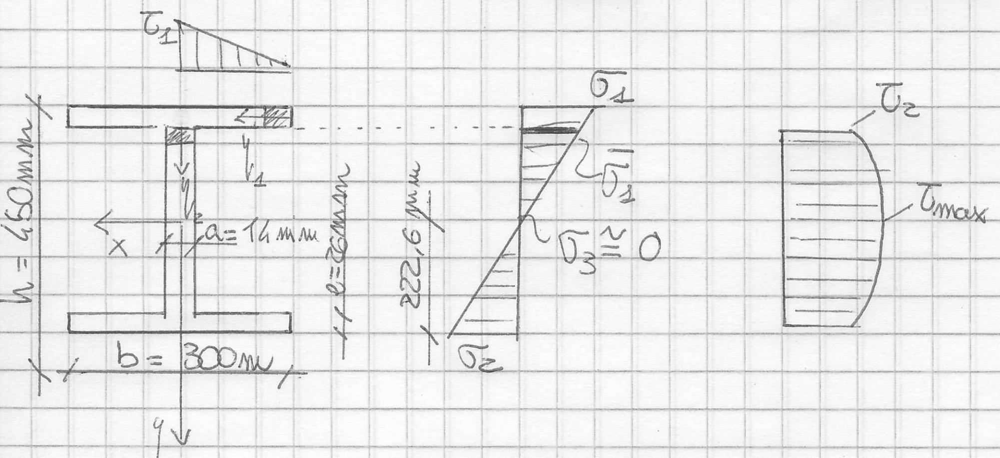
In questo modo si ricava il nuovo sistema

$$\begin{bmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta_{10} - \eta_{10}^T \\ -\eta_{20} - \eta_{20}^T \end{bmatrix}$$

da cui è possibile ricavare i nuovi valori di X_1 e X_2.

F) Verifico la sezione in H:

$M = 796{,}8\ KNm$ $\quad N = -50\ KN$ $\quad T = 132{,}8\ KN$



$W = 3550\ cm^3 \quad J = 79887\ cm^4 \quad A = 218\ cm^2$

Tensioni normali

$$\sigma = \frac{N}{A} \pm \frac{M}{W} = \left(\frac{50 \cdot 10^3}{218 \cdot 10^{-4}} \pm \frac{769{,}8 \cdot 10^3}{3550 \cdot 10^{-6}}\right) \cdot 10^{-6} = \begin{cases} \sigma_1 = 219{,}14\ MPa \\ \sigma_2 = 214{,}55\ MPa \end{cases}$$

$\bar{\sigma}_1 = 194{,}08\ MPa$

Tensioni tangenziali

$$\tau_1 = \frac{TS_1}{eJ} = \frac{132{,}8 \cdot 10^3}{0{,}026 \cdot 79887 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(\frac{300}{2} \cdot 26 \cdot 10^{-6}\right)\left(\frac{450}{2} - \frac{26}{2}\right) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 5{,}29\ MPa$$

$$\tau_2 = \frac{TS_2}{aJ} = \frac{132{,}8 \cdot 10^3}{0{,}014 \cdot 79887 \cdot 10^{-8}} \cdot \left(300 \cdot 26 \cdot 10^{-6}\right)\left(\frac{450}{2} - \frac{26}{2}\right) \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} = 19{,}63\ MPa$$

$$\tau_{max} = \tau_2 + \frac{TS_3}{aJ} = 19{,}63 + \frac{132{,}8 \cdot 10^3}{0{,}014 \cdot 79887 \cdot 10^{-8}}\left(450 \cdot 14 \cdot 10^{-6}\right)\left(\frac{450}{2} - 26\right)\frac{1}{2} \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6} =$$

$= 27{,}08\ MPa$

Calcolo delle tensioni ideali:

$\sigma_{id}^1 = \sqrt{\sigma_1^2 + 3\tau_1^2} = 219{,}3\ MPa < \sigma_{amm}$

$\sigma_{id}^2 = \sqrt{\bar{\sigma}_1^2 + 3\tau_2^2} = 197{,}0\ MPa < \sigma_{amm}$

$\sigma_{id}^3 = \sqrt{\sigma_3^2 + 3\tau_3^2} = 46{,}90\ MPa < \sigma_{amm}$

La sezione risulta verificata.