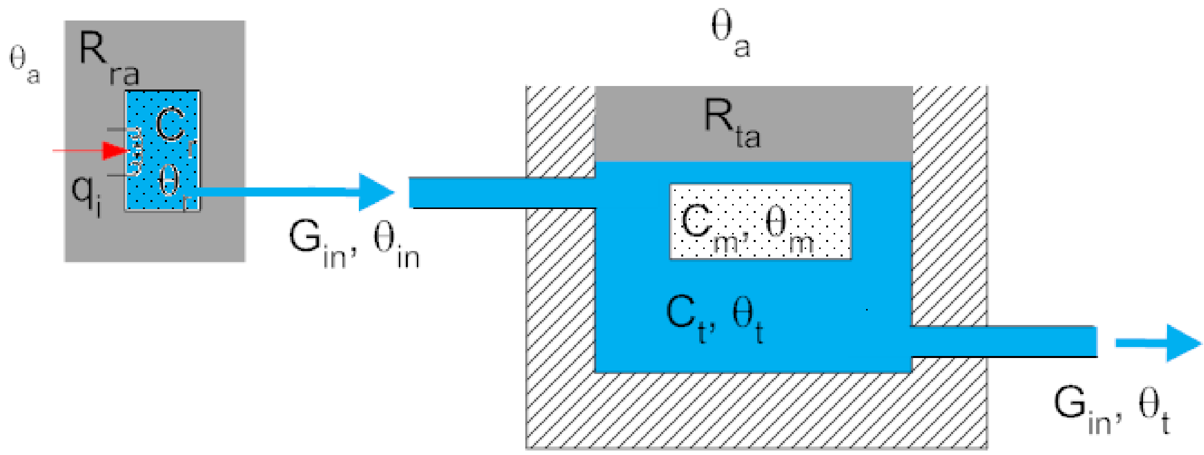
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 crediti) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 24 luglio 2019

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri un sistema per il riscaldamento di parti metalliche, costituito da un contenitore principale nel quale vengono tenute in immersione le parti e nel quale viene fatto circolare un fluido mantenuto ad opportuna temperatura, grazie ad un altro contenitore ausiliario per il riscaldamento del fluido stesso. Il sistema è schematizzato alla figura seguente, che mostra il contenitore ausiliario di riscaldamento del fluido a sinistra e quello principale di riscaldamento delle parti metalliche a destra:



Indicando con Θ_m, Θ_t, Θ_{in} rispettivamente la temperatura del metallo, quella del contenitore principale e quella del fluido in ingresso a quest'ultimo, il modello matematico del sistema si può esprimere con le seguenti equazioni (<u>nell'ipotesi che la temperatura ambiente sia nulla</u>):

$$C_m\dot{\theta}_m + \frac{\theta_m - \theta_t}{R_{mt}} = 0$$

$$C_t\dot{\theta}_t + \frac{\theta_t}{R_{ta}} = \frac{\theta_m - \theta_t}{R_{mt}} + G_{in}c_p\left(\theta_{in} - \theta_t\right)$$

$$C_r\dot{\theta}_{in} + \frac{\theta_{in}}{R_{ra}} = q_i$$

nelle quali: R_{mt} è la resistenza termica tra il metallo e il fluido; R_{ta} è la resistenza termica tra il contenitore con le parti metalliche e l'ambiente; R_{ra} è la resistenza termica tra il contenitore di riscaldamento del fluido e l'ambiente, C_m è la capacità termica del metallo; C_t è la capacità termica del contenitore principale; C_r è la capacità termica del contenitore ausiliario; G_{in} è la portata di fluido entrante/uscente dal contenitore principale (che si suppone costante), c_p è il calore specifico del fluido utilizzato e q_i è il calore erogato al contenitore ausiliario.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, di ordine 3 e del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \theta_m;\; x_2 = \theta_t;\; x_3 = \theta_{in};\; u = q_i;\; y = x_1;$$

RISPOSTA:

Sostituendo la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita ed elaborando le equazioni, si ottiene le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\tfrac{1}{C_m R_{mt}} x_1 + \tfrac{1}{C_m R_{mt}} x_2 \\
\dot{x}_2 &= \tfrac{1}{C_t R_{mt}} x_1 - \tfrac{1}{C_t}\left(\tfrac{1}{R_{ta}} + \tfrac{1}{R_{mt}} + G_{in} c_p\right) x_2 + \tfrac{G_{in} c_p}{C_t} x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\tfrac{1}{C_r R_{ra}} x_3 + \tfrac{1}{C_r} u
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_m R_{mt}} & \frac{1}{C_m R_{mt}} & 0 \\ \frac{1}{C_t R_{mt}} & -\frac{1}{C_t}\left(\frac{1}{R_{ta}} + \frac{1}{R_{mt}} + G_{in} c_p\right) & \frac{G_{in} c_p}{C_t} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{C_r R_{ra}} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{C_r} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_1$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_{mt} = 0{,}025;\ R_{ta} = 0{,}1;\ R_{ra} = 1;\ C_m = 200;\ C_t = 100;\ C_r = 100;$$
$$G_{in} = 0{,}1;\quad c_p = 1000;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno <u>completamente osservabile</u>, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema, di interesse per l'analisi di osservabilità (i.e. B non è di interesse), diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{2}{5} & -\frac{15}{10} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{100} \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

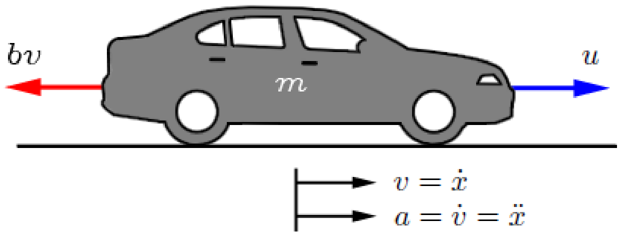
$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T\ A^T C^T\ (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/5 & 3/25 \\ 0 & 1/5 & -17/50 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente osservabile.

ESERCIZIO 3.

Si consideri il modello dinamico di un'automobile comunemente utilizzato per la regolazione automatica della velocità (*cruise control*):



Nelle condizioni di assenza del comando u (i.e. rallentamento libero), il modello è costituito dalla seguente equazione nello spazio degli stati:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{20} \end{bmatrix} x(t)$$

Si calcoli lo stato raggiunto dal sistema al tempo $t_1 = 60$ a partire dallo stato iniziale $x(0) = [\ 0 \quad 20\ ]^T$ (i.e. $t_0 = 0$)

RISPOSTA:

La matrice dinamica del sistema ha autovalori pari a 0 e -20, pertanto la sua matrice esponenziale è:

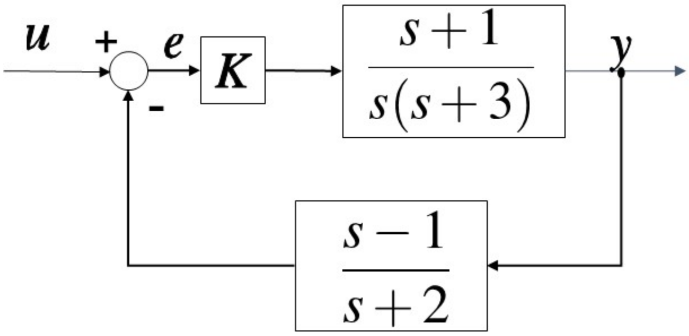
$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 20 - 20e^{-t/20} \\ 0 & e^{-t/20} \end{bmatrix}$$

e, di conseguenza, lo stato all'istante richiesto è:

$$x(60) = e^{A\,(60)} x(0) = \begin{bmatrix} 380,085 & 0,996 \end{bmatrix}^T$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini l'intervallo di valori di K tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti essere ASINTOTICAMENTE STABILE.

RISPOSTA:
Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^3 + (5 + K)s^2 + 6s - K$$

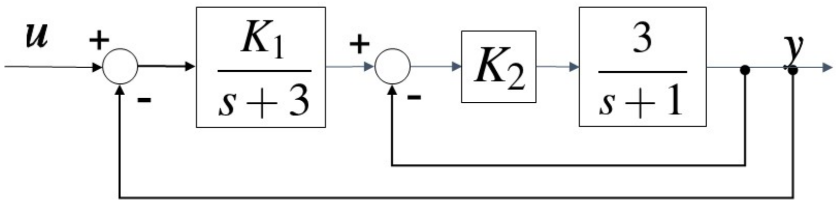
Applicando a questo polinomio il criterio di Routh, si ottiene l'intervallo di stabilità:

$$-30/7 < K < 0$$

NOTA: dalla tabella di Routh risulta anche il vincolo $K > -5$ che però è dominato dall'estremo sinistro riportato nella soluzione finale.

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K_1 e K_2 tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti avere coefficiente di smorzamento $\delta = 0,5$ e tempo di assestamento $T_a = 2$ secondi.

RISPOSTA:
Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^2 + (4 + 3K_2)s + 3 + 9K_2 + 3K_1K_2$$

Per i vincoli imposti dal testo, la pulsazione naturale desiderata deve essere pari a ω_n=3, perciò confrontando il denominatore ad anello chiuso con quello del tipico sistema del secondo ordine si ottengono le seguenti condizioni sui parametri di progetto:

$$4 + 3K_2 = 2\delta\omega_n = 3$$

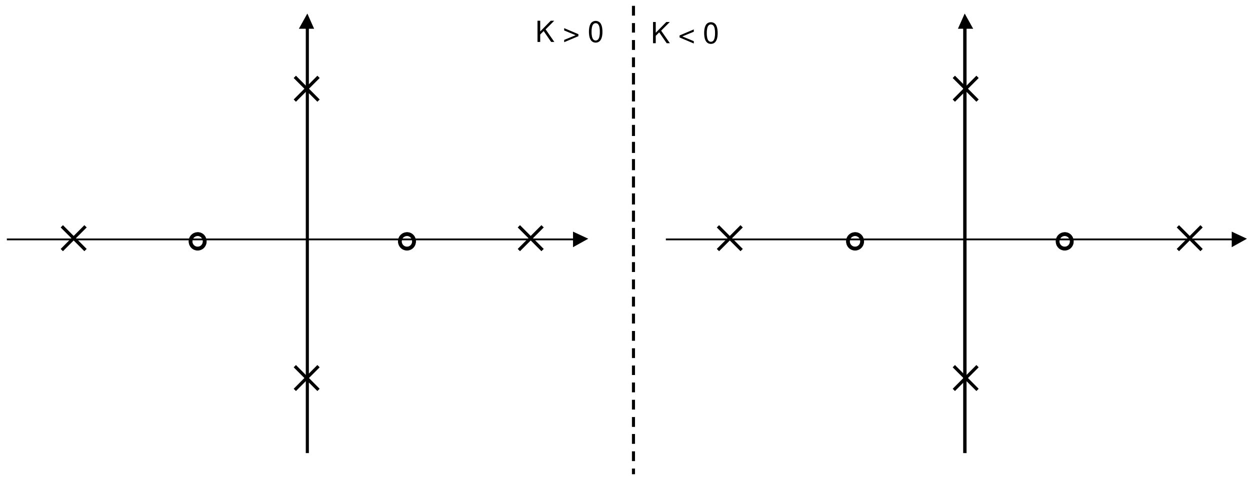
$$3 + 9K_2 + 3K_1K_2 = \omega_n^2 = 9$$

Risolvendo il sistema precedente si ottiene quindi la soluzione finale:

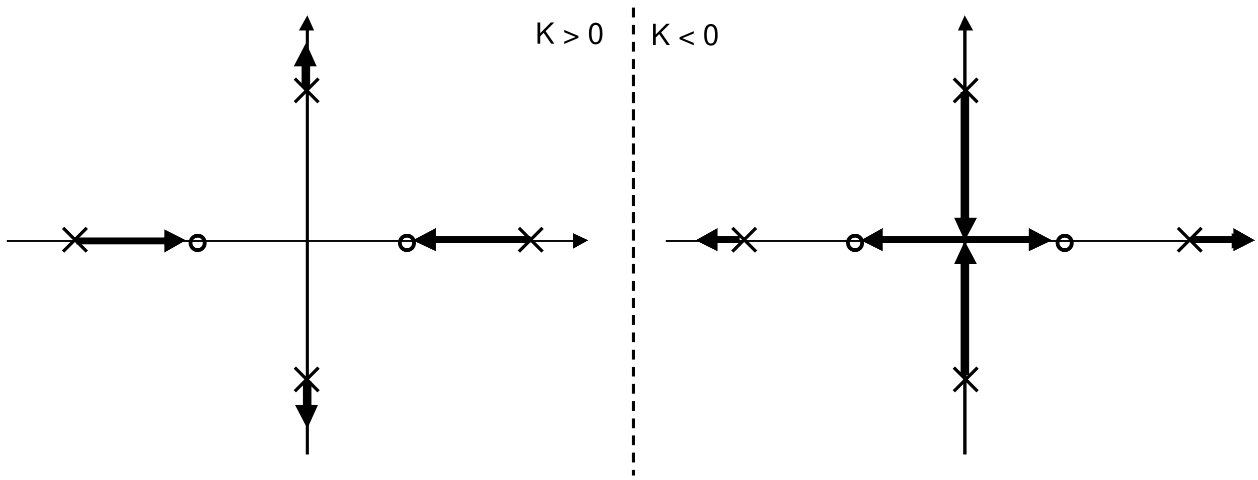
$$K_1 = -9 \qquad K_2 = -1/3$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

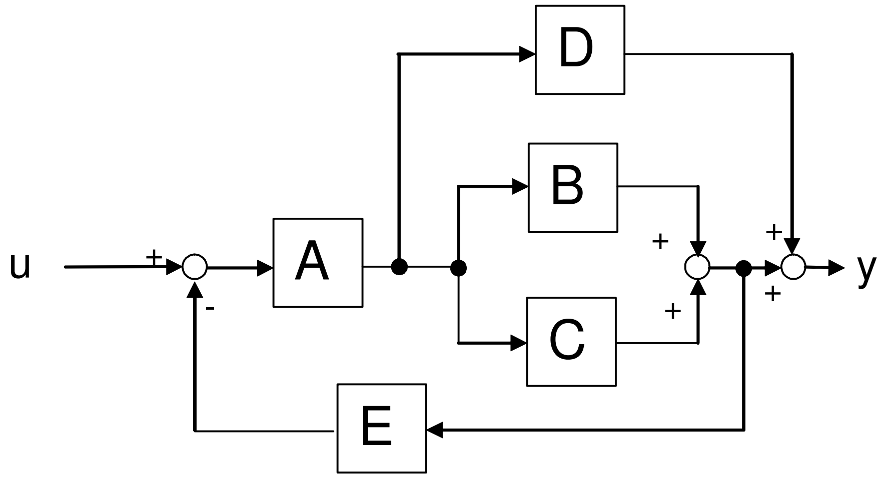


RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Si determini la funzione di trasferimento del seguente diagramma a blocchi:



RISPOSTA:

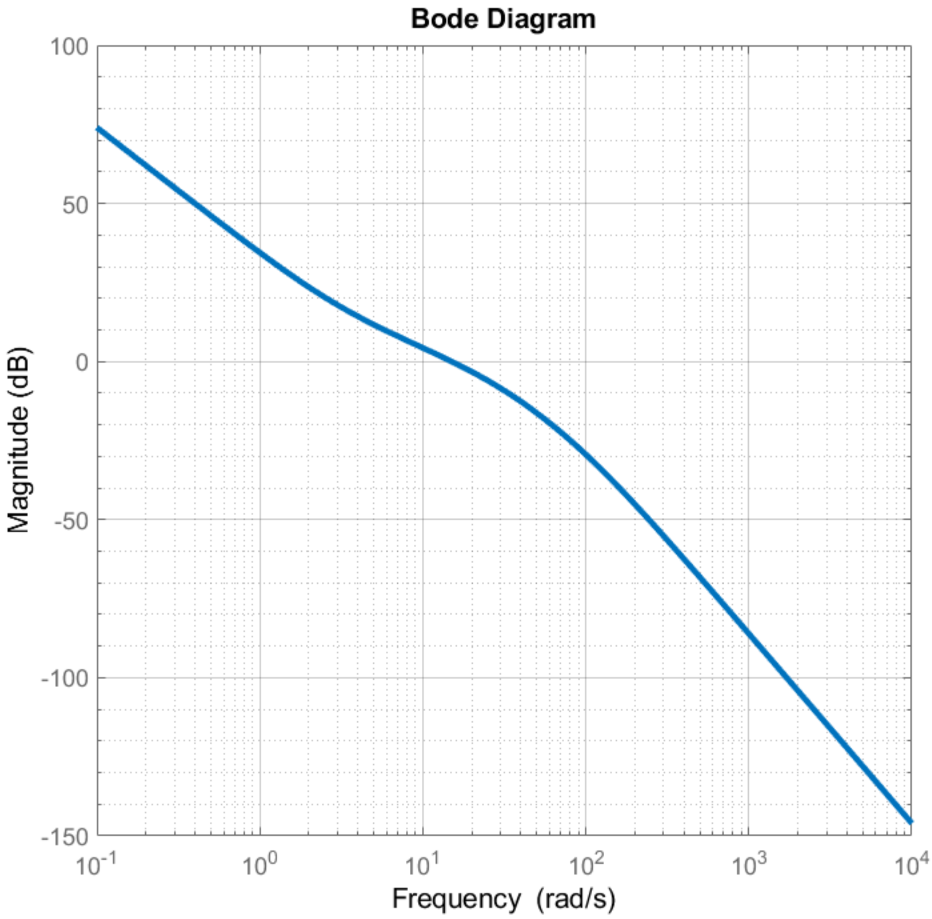
Per risolvere il problema è opportuno spostare la diramazione entrante nel blocco D a monte della struttura con B e C in parallelo tra loro. Così facendo, si ottengono due strutture in serie, costituite rispettivamente dalla retroazione tra A*(B+C) ed E e dal parallelo tra D/(B+C) ed un ramo unitario, per cui:

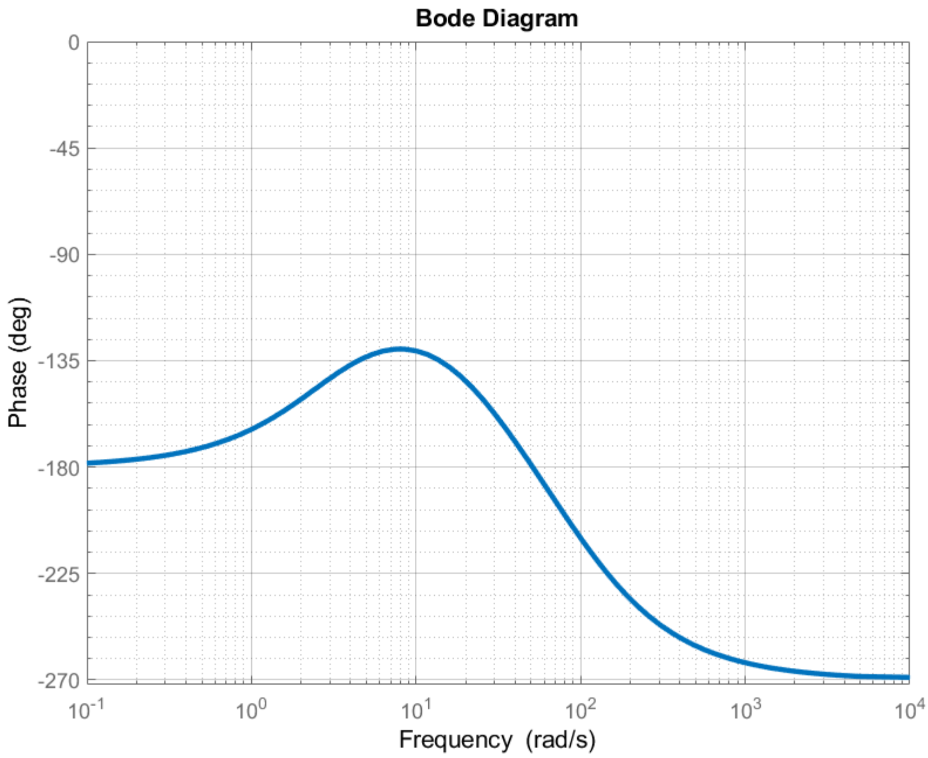
$$Y / U = \Big[A (B + C) / \; [1 + AE (B + C) \Big] * \Big[D / (B + C) + 1 \Big]$$
$$= \Big[A (B + C + D) / \; [1 + AE (B + C) \Big] \text{ (semplificando)}$$

NOTA: Il risultato semplificato può essere ottenuto immediatamente spostando la diramazione entrante in E a valle del parallelo tra B e C. Il nuovo ramo di retroazione avrà funzione di trasferimento E*(B+C) e l'anello (avente ramo diretto con la sola A) sarà in serie con il parallelo tra B, C e D.

ESERCIZIO 8.

Dato il seguente diagramma di Bode completo (ampiezze in alto, fasi in basso), si determini per via grafica il margine di fase della funzione di trasferimento corrispondente (con arrotondamento al multiplo di 5° più vicino).

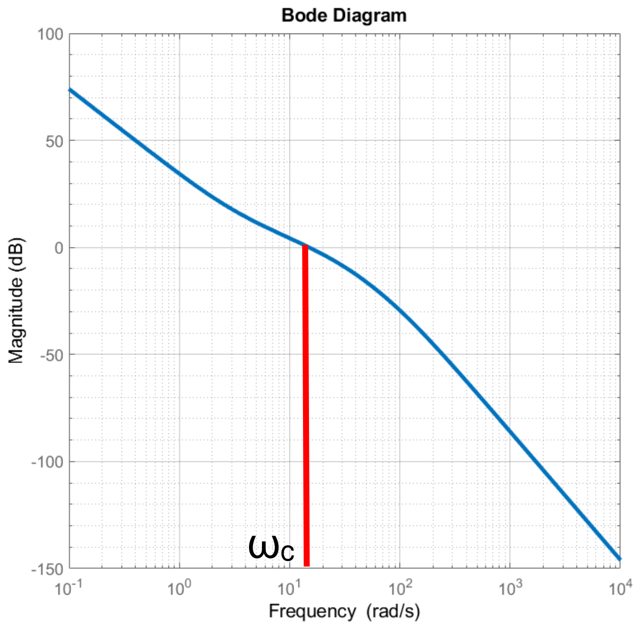

Bode Diagram
100
50
0
-50
-100
-150
Magnitude (dB)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)


Bode Diagram
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
Phase (deg)
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
10^{4}
Frequency (rad/s)

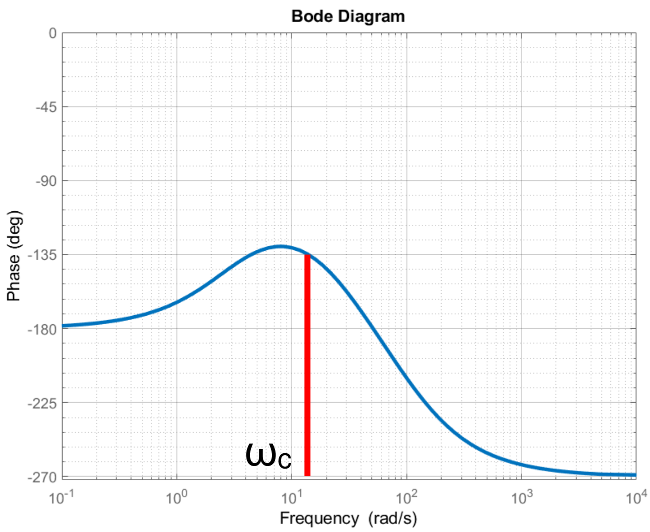
RISPOSTA:
Il procedimento per determinare il margine di fase per via grafica dai diagrammi di Bode di una funzione di trasferimento è il seguente:

1. Si determina anzitutto la cosiddetta *pulsazione di incrocio* (o *pulsazione critica*), cioè la pulsazione ω_C alla quale il diagramma delle ampiezze è pari a 1, in valore assoluto. **NOTA**: il diagramma delle ampiezze fornito ha la scala delle ordinate in dB, pertanto il valore unitario del modulo corrisponde a 0 dB.
2. Si valuta il valore della fase in corrispondenza della pulsazione ω_C. Il margine di fase è l'angolo che occorre sottrarre al valore di fase ottenuto per arrivare a -180° (i.e. $-\pi$ radianti).

Dai diagrammi si può determinare la pulsazione di incrocio ω_C pari a circa 15 rad/s:



In corrispondenza di tale pulsazione, la fase corrisponde a (circa) -135°:



pertanto il margine di fase (i.e. $-180° = \arg[G(j\omega_c)] - M_f \Rightarrow M_f = \arg[G(j\omega_c)] + 180°$)
è: $M_f = 30°$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Due sistemi dinamici, lineari e stazionari, asintoticamente stabili, collegati in cascata danno luogo ad un sistema:

X asintoticamente stabile
O semplicemente stabile
O instabile
X lineare e stazionario

DOMANDA 2.
L'ingresso u(t) e l'uscita y(t) di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$
Tale sistema è:
O puramente algebrico
X puramente dinamico
O dinamico, non puramente
O non fisicamente realizzabile

DOMANDA 3.
Il polinomio caratteristico di un sistema dinamico lineare, stazionario e tempo continuo, è:

$$\lambda^3(\lambda + 2)$$

Il sistema:

X presenta modi semplicemente stabili
X presenta modi asintoticamente stabili
O presenta modi instabili
X può presentare modi instabili

DOMANDA 4.
La funzione di trasferimento di un sistema dinamico a tempo continuo è:

$$G(s) = \frac{(s+2)(s+1)}{s(s+3)}$$

Tale sistema:
O è puramente dinamico
O è asintoticamente stabile
X è semplicemente stabile
X è a fase minima

DOMANDA 5.
Il luogo delle radici di una funzione di trasferimento di anello, con n poli ed m zeri ($n > m$), presenta almeno un asintoto reale:

X quando $K > 0$ (luogo diretto) e $n - m$ è dispari
O quando $K > 0$ (luogo diretto) e $n - m$ è pari
X quando $K < 0$ (luogo inverso) e $n - m$ è dispari
X quando $K < 0$ (luogo inverso) e $n - m$ è pari