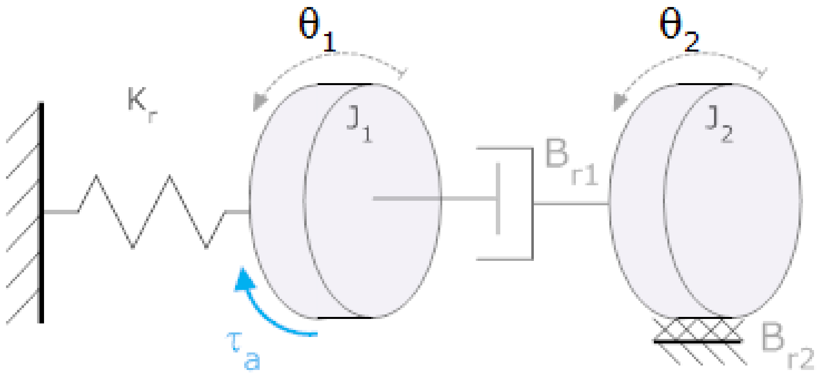
Esame di "FONDAMENTI DI AUTOMATICA" (6 CFU) / "CONTROLLI AUTOMATICI"

Prova scritta – 10 novembre 2017

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il seguente sistema meccanico costituito da due cilindri rotanti accoppiati:



Dall'analisi di bilancio delle forze generalizzate applicate ai due cilindri, si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + B_{r1}\dot{\theta}_1 + K_r\theta_1 - B_{r1}\dot{\theta}_2 = -\tau_a$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (B_{r2} + B_{r1})\dot{\theta}_2 - B_{r1}\dot{\theta}_1 = 0$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

considerando le seguenti scelte per gli elementi del vettore di stato, per l'ingresso e per l'uscita:

$$x_1 = \theta_1;\ x_2 = \dot{\theta}_1;\ x_3 = \dot{\theta}_2;\ u = \tau_a;\ y = \theta_1$$

RISPOSTA:

Occorre
- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che le derivate della seconda e della terza variabile di stato corrispondono a:

$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1$ e $\dot{x}_3 = \ddot{\theta}_2$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_r}{J_1}x_1 - \frac{B_{r1}}{J_1}x_2 + \frac{B_{r1}}{J_1}x_3 - \frac{1}{J_1}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{B_{r1}}{J_2}x_2 - \frac{B_{r2}+B_{r1}}{J_2}x_3
\end{aligned}
$$

Dalle quali risultano le matrici A e B:

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_r}{J_1} & -\frac{B_{r1}}{J_1} & \frac{B_{r1}}{J_1} \\ 0 & \frac{B_{r1}}{J_2} & -\frac{B_{r2}+B_{r1}}{J_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}
$$

e poiché $y = \theta_1 = x_1$, l'uscita non dipende dall'ingresso ($D = 0$, sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$
C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}
$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$J_1 = 0{,}2$; $J_2 = 0{,}1$; $K_r = 2$; $B_{r1} = 0{,}2$; $B_{r2} = 0{,}1$;

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema di interesse per l'analisi di raggiungibilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 35 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** / ~~NON E'~~ completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -2, -3, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$
\begin{aligned}
p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\
&= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6
\end{aligned}
$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$
A+BH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5h_1-10 & -5h_2-1 & 1-5h_3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}
$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\
&= \lambda^3 + (5h_2+4)\lambda^2 + (5h_1+15h_2+10h_3+11)\lambda + 15h_1+30
\end{aligned}
$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

$$
\begin{aligned}
5h_2+4 &= 6 \\
5h_1+15h_2+10h_3+11 &= 11 \\
15h_1+30 &= 6
\end{aligned}
$$

la cui soluzione finale è:

$$
H = [\ -8/5 \quad 2/5 \quad 1/5\ ]
$$

ESERCIZIO 4.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t)$

con:

$$
A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema considerato.

RISPOSTA:

Ricordando che la funzione di trasferimento è legata alle matrici del sistema dalla formula:

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$$

e considerando che la matrice al centro del prodotto risulta:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

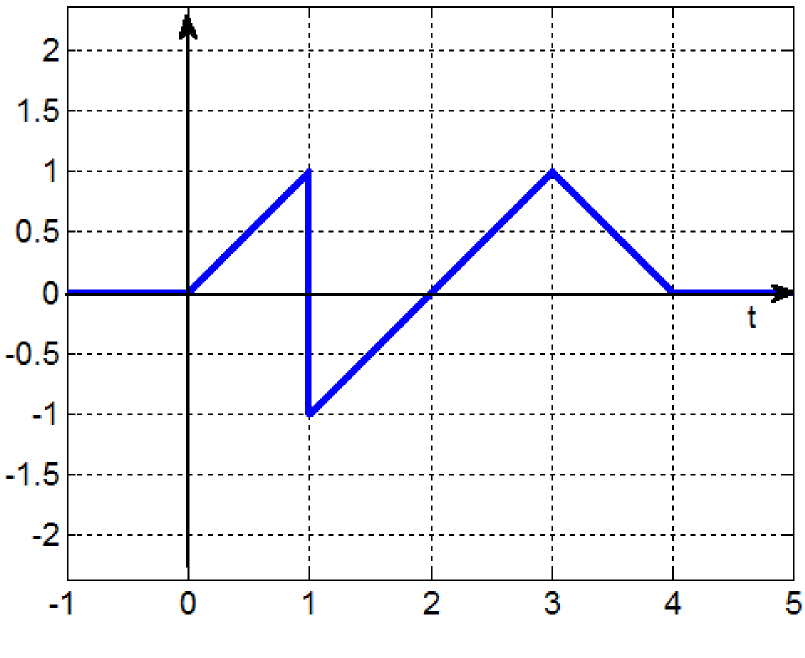
si ottiene come risultato finale:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

Si noti che i due poli della funzione di trasferimento corrispondono ai due autovalori della matrice A di partenza (condizione tipica di un sistema completamente controllabile e completamente osservabile).

ESERCIZIO 5.

Si determini la trasformata di Laplace del seguente segnale nel dominio del tempo $f(t)$:

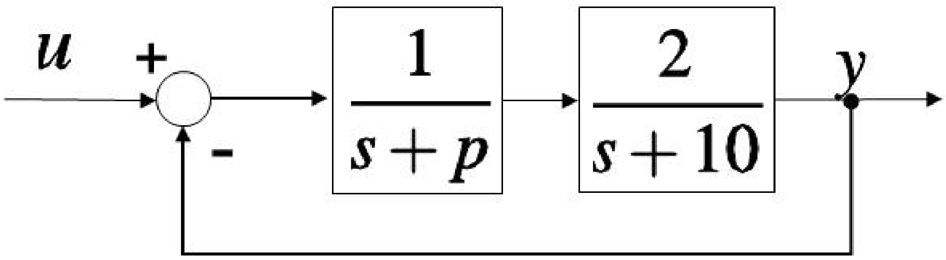


RISPOSTA:

$$F(s) = 1/s^2 – e^{-s} (2/s) – e^{-3s} (2/s^2) + e^{-4s} (1/s^2)$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si calcoli il valore di p per il quale il sistema chiuso in retroazione risulti avere tempo di assestamento pari a 0,3 secondi.

RISPOSTA:

Il denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso risulta:

$$D_{cl}(s) = s^2 + (10 + p)s + 10p + 2$$

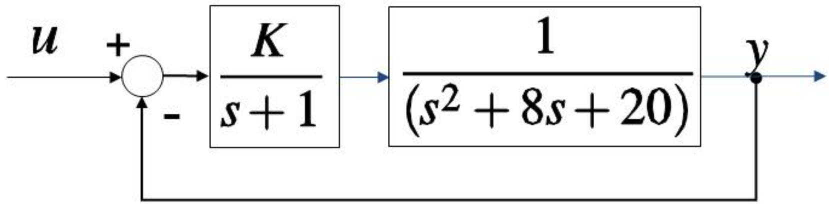
il cui termine di primo grado corrisponde al termine $2\,\delta\,\omega_n$ del tipico denominatore di un sistema del secondo ordine. Ricordando che per tale tipo di sistema il tempo di assestamento è: $T_a = \frac{3}{\delta\,\omega_n}$, dal vincolo di progetto si ottiene $2\,\delta\,\omega_n = 20 = 10 + p$, da cui:

$$p = 10$$

NOTA: il coefficiente costante del polinomio, cioè il quadrato della pulsazione naturale, non è associato ad alcun vincolo.

ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

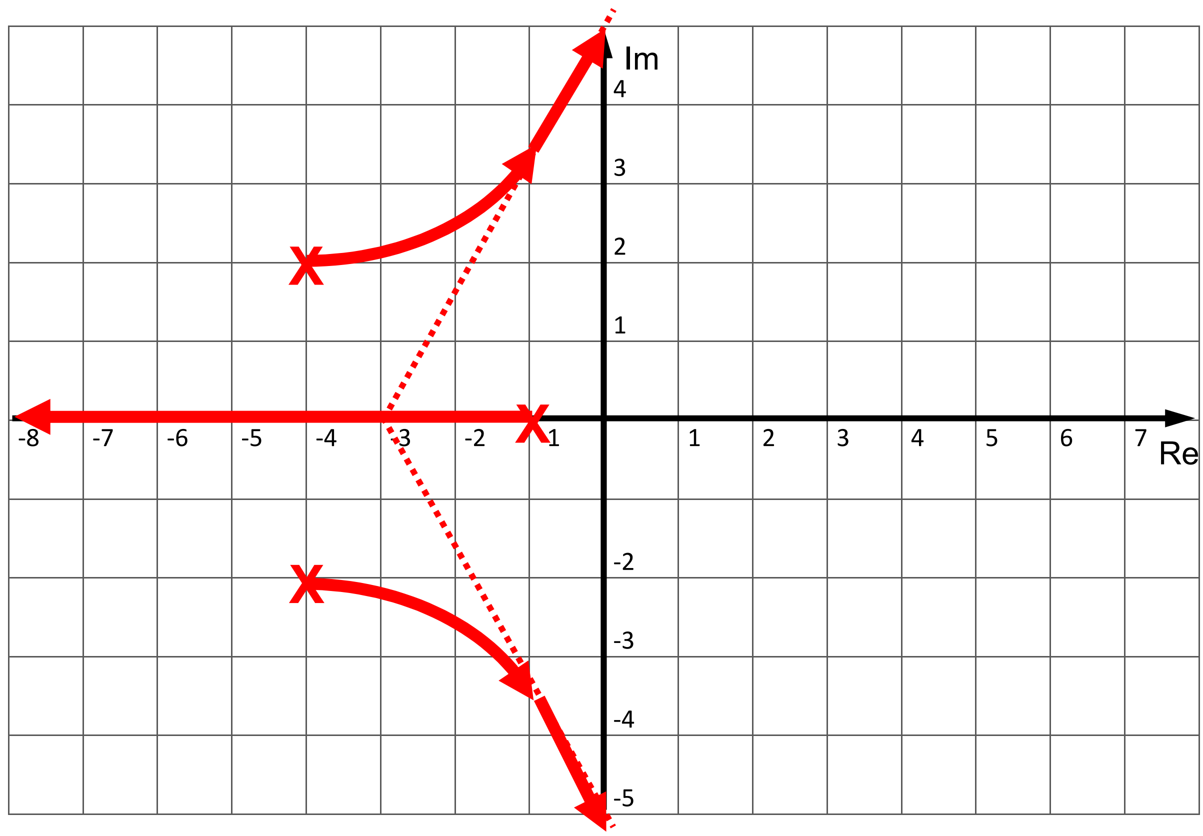


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per K > 0 (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello non ha alcuno zero (n_z = 0), ma ha tre poli (n_p = 3) rispettivamente in -1, -4-2i e -4+2i. Pertanto il luogo ha tre asintoti (numero asintoti = n_p - n_z = 3), disposti con angoli di π/3, π e 5/3*π rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -3$$



ESERCIZIO 8.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 7, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema risulti <u>asintoticamente stabile</u>.

RISPOSTA:

L'intervallo di stabilità per i valori di K si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

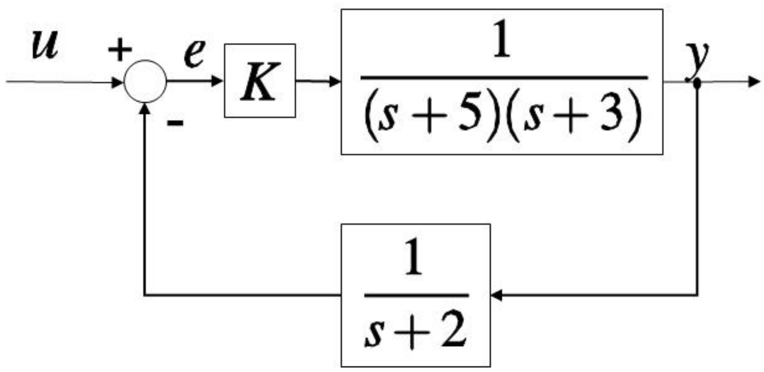
$$D_{cl}(s) = s^3 + 9s^2 + 28s + 20 + K$$

Dalla tabella di Routh si ottengono due vincoli per K, cioè K > -20 e K < 232, perciò:

$$-20 < K < 232$$

ESERCIZIO 9.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito:



si calcoli il valore di K con il quale l'errore a regime (i.e. il segnale e(t) per t che tende all'infinito) in risposta ad un gradino di ampiezza unitaria (u(s) = 1 / s) risulta:

$$e(\infty) = 0,2$$

RISPOSTA:

$$K = 120$$

ESERCIZIO 10.

Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{30\left(1+\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+\frac{s}{50}\right)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

Si disegni il diagramma di Bode delle ampiezze, considerando solo la linea spezzata che ne determina l'approssimazione asintotica.

Si noti che entrambi gli assi del piano predisposto per il tracciato del diagramma sono in scala logaritmica (es. la prima linea tratteggiata dopo il valore 10 indica il valore 20, la seguente il valore 30 ecc.) e l'asse delle ordinate esprime valori assoluti (i.e. non unità in dB).

RISPOSTA:

NOTA: La FdT ha un polo nell'origine, quindi la pendenza iniziale è -1 sul diagramma logaritmico (u,e, -20dB/decade) e il tratto iniziale deve passare per {-1 rad/s / 30 }.