

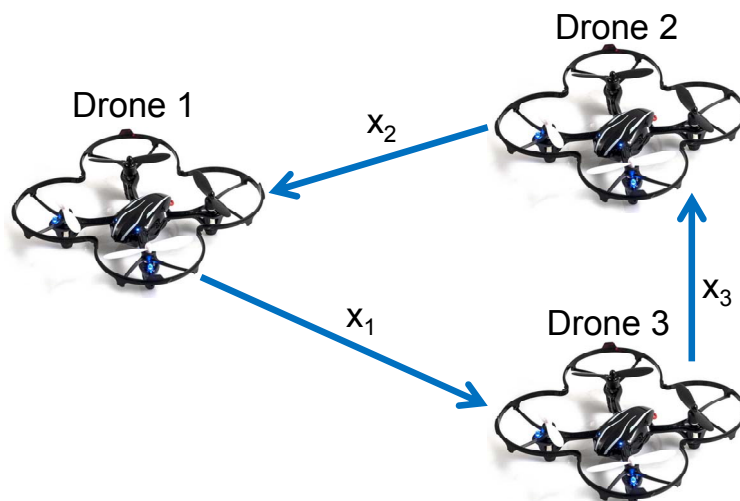
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 20 giugno 2017

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema di sorveglianza costituito da una flotta di droni di tipologia quadricottero. Per coordinare e sincronizzare il moto dei quadricotteri è prevista una rete di comunicazione wireless low-power, con la quale ogni drone può inviare la propria posizione nello spazio solo ad uno dei droni vicini e solo uno dei droni può inviare la propria posizione al sistema di supervisione centralizzato. Come caso specifico si considerino tre droni con il seguente schema di comunicazione:



Al fine di mantenere un moto coordinato della flotta, ogni drone è programmato per regolare la propria velocità in funzione della distanza con l'altro drone del quale riceve la posizione via rete wireless, più un eventuale comando esterno fornito dal supervisore centralizzato. Considerando per semplicità la posizione del drone come una variabile scalare, indicata con x_i , le equazioni differenziali che descrivono il moto della flotta di tre droni sono esprimibili come segue:

$$\dot{x}_i = -(x_i - x_j) + b_i u$$

con le seguenti combinazioni degli indici i e j : $[i=1, j=2]$, $[i=2, j=3]$, $[i=3, j=1]$.
Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le posizioni dei droni come variabili di stato e considerando $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ e $b_3 = 0$. Per quando riguarda la variabile di uscita invece, si consideri $y = x_i$, con:

- $i = 1$, se il proprio numero di matricola termina con 0.
- $i = 2$, se il proprio numero di matricola termina con una cifra pari diversa da 0.
- $i = 3$, se il proprio numero di matricola termina con una cifra dispari.

Si verifichi poi se il sistema considerato risulti o meno completamente osservabile, in base al proprio numero di matricola, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Occorre anzitutto sostituire gli indici nella generica equazione differenziale fornita dal testo. Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 + u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_3\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y = x_i$, poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1×3 che estrae la variabile dal vettore di stato è:

- $C = [1 \ 0 \ 0]$, per numeri di matricola che terminano con 0.
- $C = [0 \ 1 \ 0]$, per numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0)
- $C = [0 \ 0 \ 1]$, per numeri di matricola che terminano con cifra dispari.

Nei tre casi, la matrice di osservabilità risulta:

- Numeri di matricola che terminano con 0:

$$Q^T = [C^T \ A^T C^T \ (A^T)^2 C^T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0):

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra dispari:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Poiché risulta sempre $\text{rango}(Q^T) = 3$, il sistema è completamente osservabile per ogni possibile numero di matricola.

ESERCIZIO 2.

Per il sistema ottenuto all'Esercizio 1, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con un tempo di assestamento (al 5%) di 1 secondo.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 1) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell'osservatore in catena chiusa. Gli autovalori desiderati sono determinati dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 1$ ed autovalori tutti uguali tra loro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -3$.
Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per l'osservatore deve essere:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda + 3)^3 = \lambda^3 + 9\lambda^2 + 27\lambda + 27$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3×1 , cioè $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K e il polinomio caratteristico dell'osservatore risultano:

- Numeri di matricola che terminano con 0:

$$A + KC = \begin{bmatrix} k_1 - 1 & 1 & 0 \\ k_2 & -1 & 1 \\ k_3 + 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - k_1)\lambda^2 + (3 - k_1 - 2k_1)\lambda - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0):

$$A + KC = \begin{bmatrix} -1 & k_1 + 1 & 0 \\ 0 & k_2 - 1 & 1 \\ 1 & k_3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - k_2)\lambda^2 + (3 - k_3 - 2k_2)\lambda - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra dispari:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & k_1 \\ 0 & -1 & k_2 + 1 \\ 1 & 0 & k_3 - 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - k_3)\lambda^2 + (3 - k_1 - 2k_3)\lambda - k_1 - k_2 - k_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K , risolti i quali si ottengono le seguenti soluzioni per i tre casi:

- Numeri di matricola che terminano con 0:

$$K = \begin{bmatrix} -6 & -12 & -9 \end{bmatrix}^T$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra pari (non 0):

$$K = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -12 \end{bmatrix}^T$$

- Numeri di matricola che terminano con cifra dispari:

$$K = \begin{bmatrix} -12 & -9 & -6 \end{bmatrix}^T$$

ESERCIZIO 3.

Si calcoli la risposta impulsiva del sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad y(t) = Cx(t) \quad \text{con}$$

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è:

$$W(t) = Ce^{At}B$$

Notando che gli autovalori della matrice A , che è triangolare inferiore, sono -2 e -3 ed applicando il metodo del polinomio interpolante per il calcolo dell'esponenziale della matrice A , si ottiene:

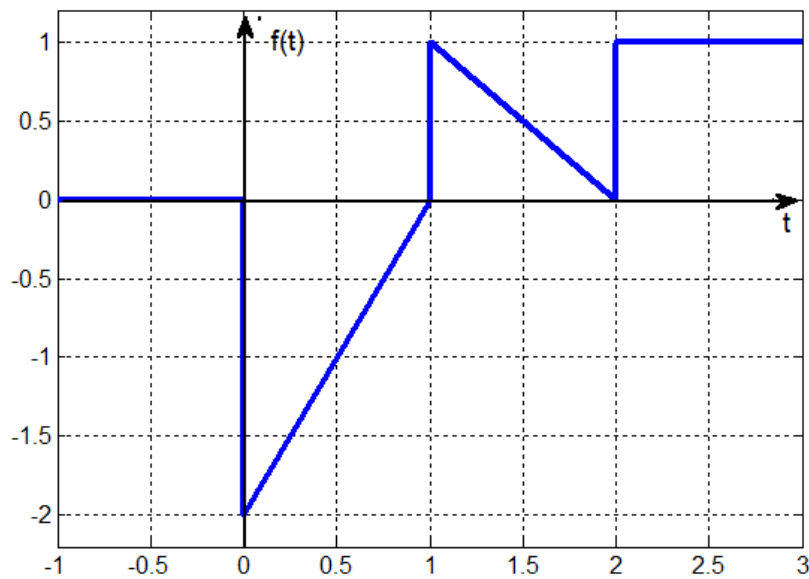
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ \frac{1}{2}e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-5t} & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

e quindi:

$$W(t) = e^{-3t}$$

ESERCIZIO 4.

Dato il segnale $f(t)$ avente andamento nel tempo come indicato in figura, si determini la trasformata di Laplace $F(s)$ di detto segnale:

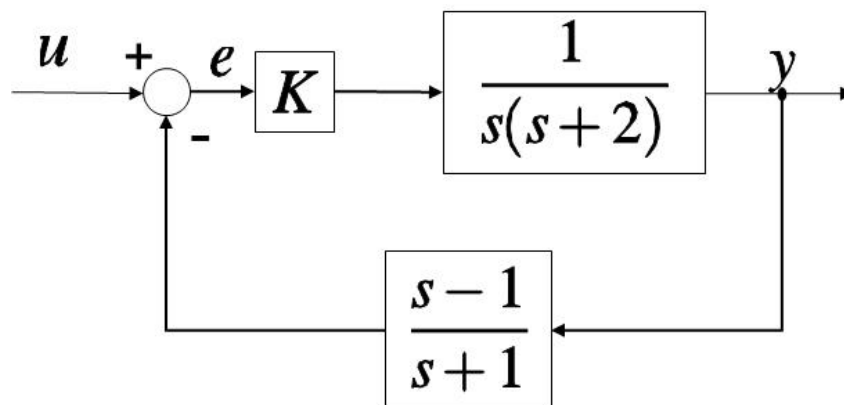


RISPOSTA:

$$F(s) = -2/s + 2/s^2 + e^{-s} (1/s - 3/s^2) + e^{-2s} (1/s^2 + 1/s)$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K tali per cui il sistema chiuso in retroazione risulti essere asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al denominatore del sistema chiuso in retroazione:

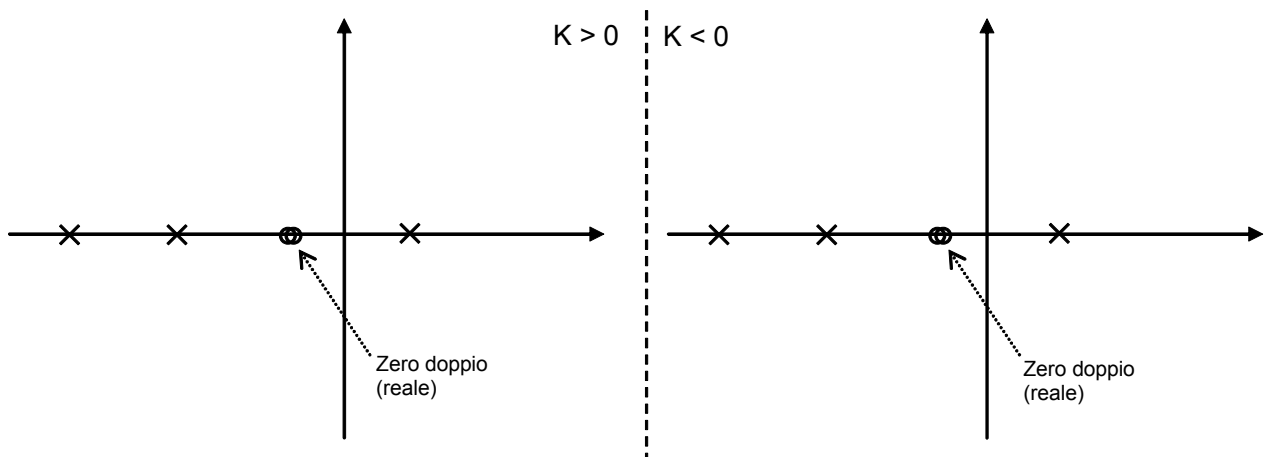
$$s^3 + 3s^2 + (2 + K)s - K$$

si ottiene che:

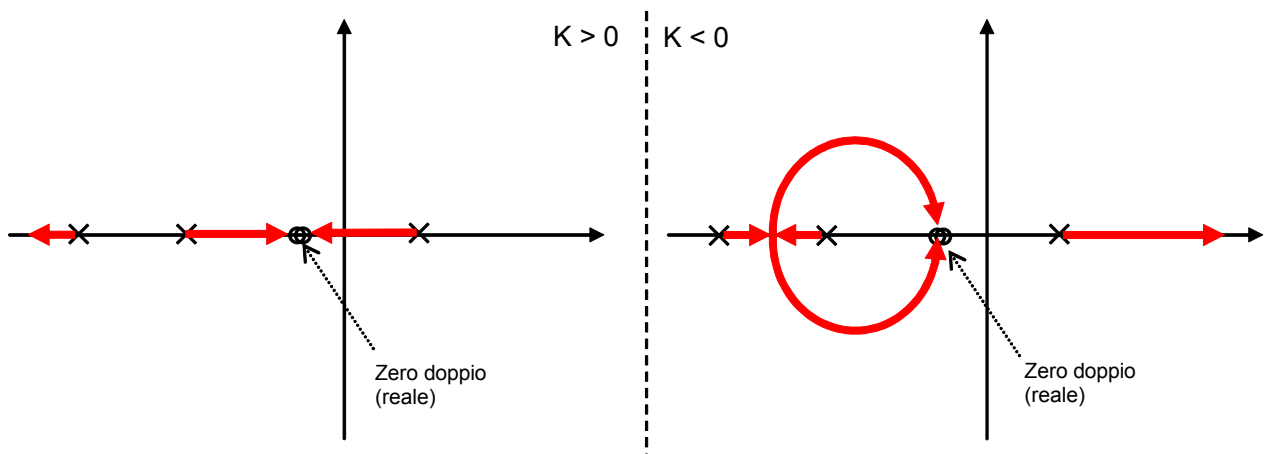
$$-3/2 < K < 0$$

ESERCIZIO 6.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

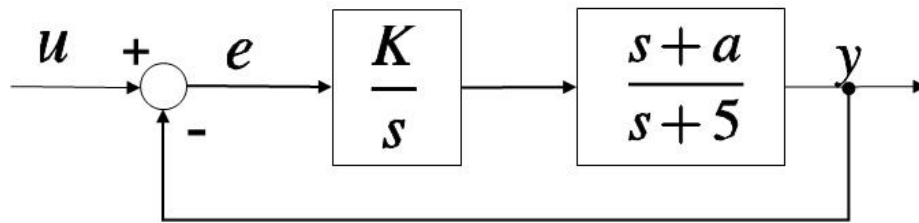


RISPOSTA:



ESERCIZIO 7.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e a tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere una coppia di poli complessi e coniugati in $p_{1,2} = -3 \pm j 2$

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + 5) s + K a$.

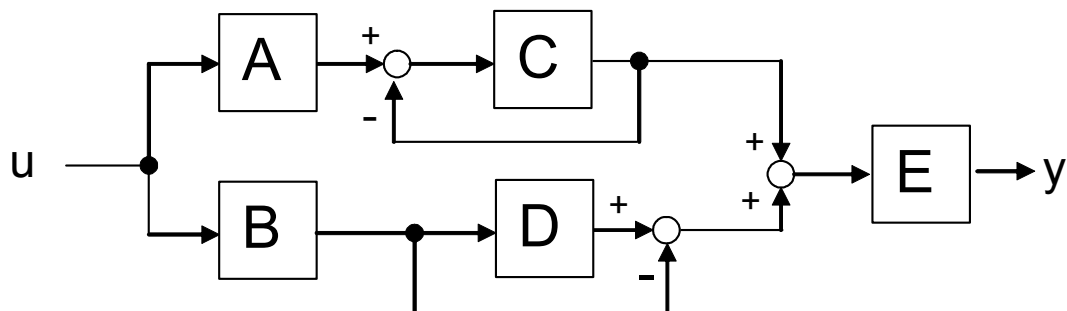
Imporre che il sistema ad anello chiuso abbia i poli $p_{1,2} = -3 \pm j 2$ significa imporre che:

$$s^2 + (K + 5) s + K a = s^2 + 6 s + 13$$

Risolvendo il sistema di due equazioni in due incognite (K e a) ottenuto uguagliando uguagliando due termini costanti e i due coefficienti dei termini di primo grado, si ottiene il risultato finale:

$$K = 1 \quad a = 13$$

ESERCIZIO 8.

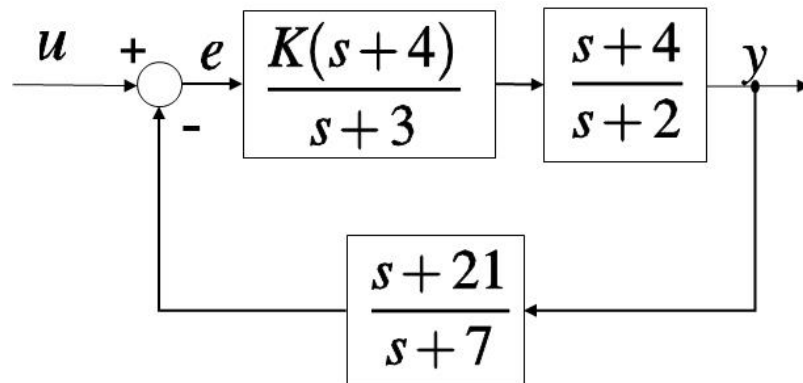


RISPOSTA:

$$Y / U = [A C / (1 + C) + B (D - 1)] E$$

ESERCIZIO 9.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale per cui il sistema risulti avere errore a regime pari a:
 $e(\infty) = 0,2$ con ingresso a gradino unitario ($U(s) = 1/s$)

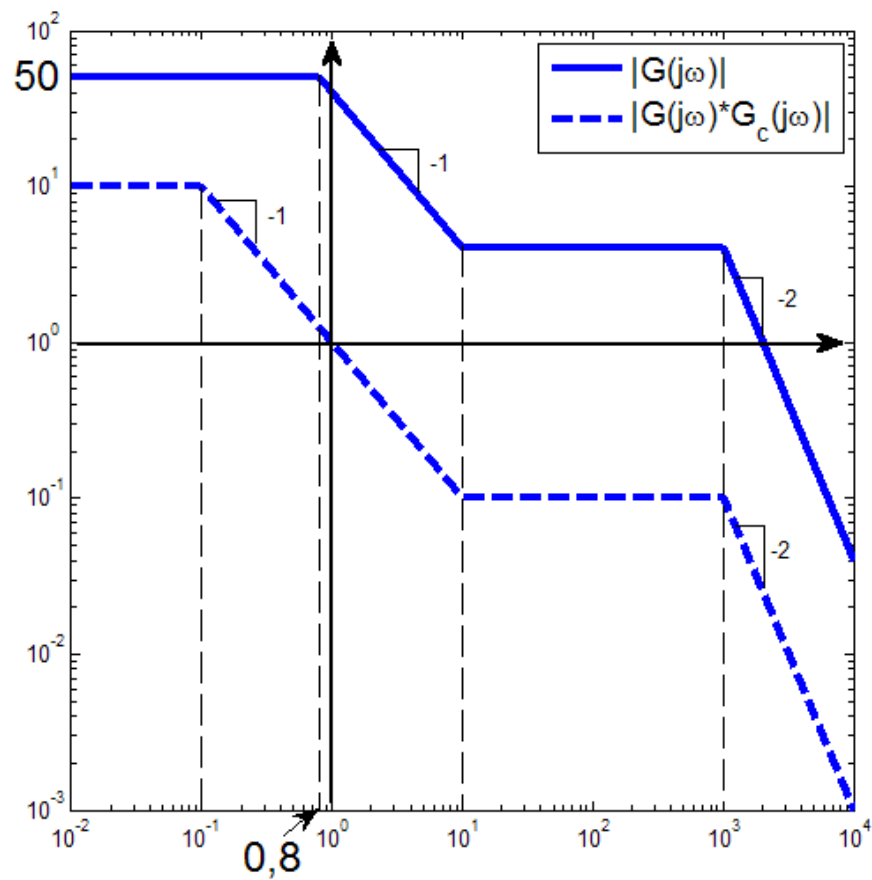
RISPOSTA:

Applicando il metodo descritto nella slide 44 della dispensa “FdA-2.4-Stabilità FdT-LuogoRadici_2017.pdf”, si ottiene:

$$K = 0,5 = 1/2$$

ESERCIZIO 10.

Dati i seguenti diagrammi di Bode delle ampiezze:



si determinino le funzioni di trasferimento $\mathbf{G(s)}$ e $\mathbf{G_c(s)}$, supposte entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{50(1+\frac{s}{10})}{(1+\frac{s}{0,8})(1+\frac{s}{1000})^2}$$

$$G_c(s) = \frac{(1+\frac{s}{0,8})}{5(1+\frac{s}{10^{-1}})}$$
