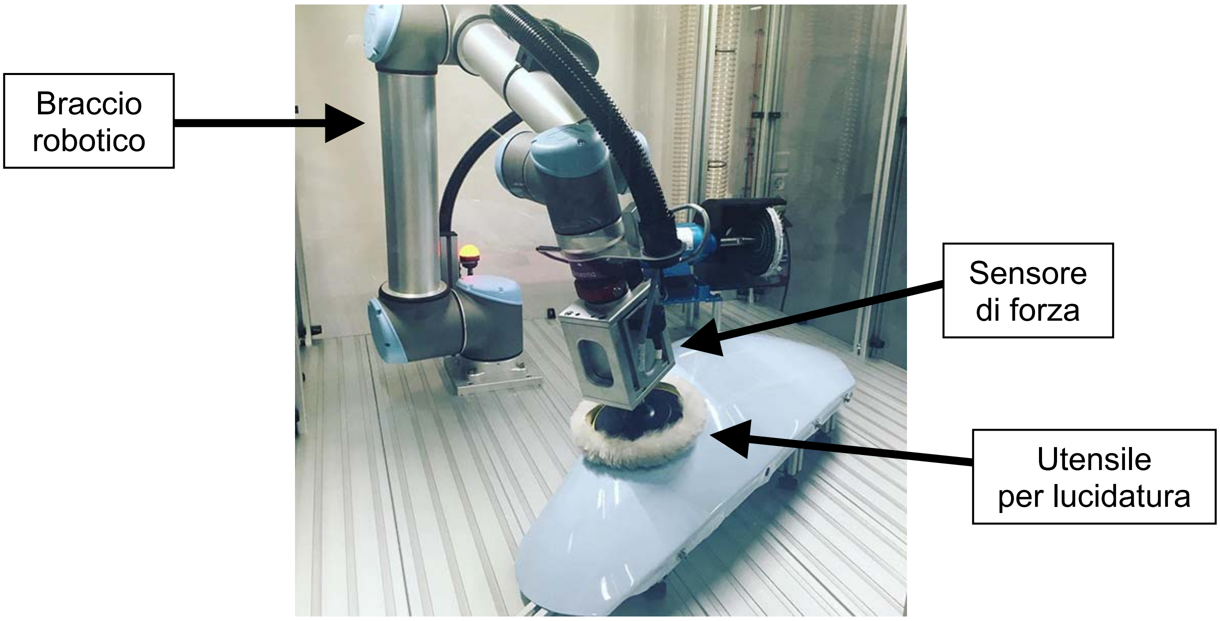
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (6 CFU) / “CONTROLLI AUTOMATICI”

Prova scritta – 28 giugno 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema robotico per la lucidatura automatica della superficie di lamiere, costituito da un braccio meccanico articolato sulla cui flangia terminale è installato l’utensile per lucidatura. Tra la flangia del robot e l’utensile vero e proprio è inserito un sensore di forza, allo scopo di mantenere sempre l’utensile in contatto con la superficie da lucidare anche qualora questa non sia planare, regolando la forza di contatto misurata.



Considerando solo movimenti e forze nella direzione normale alla superficie da lucidare, che la posizione della superficie di contatto p_s **sia sempre l’origine degli spostamenti** (i.e. $p_s=0$), che la posizione dell’utensile sia governata dalla forza generata da un attuatore elettrico comandato da una tensione proporzionale all’errore rispetto a un riferimento p_i e che la forza di contatto sia proporzionale alla differenza tra la posizione dell’utensile p_r e p_s, il modello del sistema si può descrivere con le seguenti equazioni:

$$L_m \dot{I}_m + R_m I_m + K_m \dot{p}_r = K_c(p_i - p_r)$$

$$M \ddot{p}_r + B_d \dot{p}_r + F_n = K_m I_m$$

$$F_n = K_s(p_r - p_s) = K_s p_r$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = p_r;\; x_2 = \dot{p}_r;\; x_3 = I_m;\; u = p_i;\; y = F_n;$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della prima variabile di stato corrisponde alla seconda variabile di stato: $\dot{x}_1 = x_2$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_s}{M}x_1 - \frac{B_d}{M}x_2 + \frac{K_m}{M}x_3 \\
\dot{x}_3 &= -\frac{K_c}{L_m}x_1 - \frac{K_m}{L_m}x_2 - \frac{R_m}{L_m}x_3 + \frac{K_c}{L_m}u
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_s}{M} & -\frac{B_d}{M} & \frac{K_m}{M} \\ -\frac{K_c}{L_m} & -\frac{K_m}{L_m} & -\frac{R_m}{L_m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_c}{L_m} \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato considerando l'uscita $y=F_n=K_s x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} K_s & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_m = 0{,}4; \quad L_m = 0{,}1; \quad K_m = 1; \quad K_c = 4;$$

$$M = 2; \quad B_d = 4; \quad K_s = 6;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente osservabile, calcolando la matrice di osservabilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 1/2 \\ -40 & -10 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T \; A^T C^T \; (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -18 \\ 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

rango(Q^T) = 3

Perciò il sistema **E’** ~~/ NON E’~~ completamente osservabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell’Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con un tempo di assestamento (al 5%) di 0,5 secondi.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell’osservatore in catena chiusa. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell’esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 1$ ed autovalori tutti uguali tra loro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per l'osservatore deve essere:

$$p_{des}(\lambda) = (\lambda+6)^3 = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 108\lambda + 216$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3x1, cioè $K = [k_1 \;\; k_2 \;\; k_3]^T$, pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K risulta:

$$A + KC = \begin{bmatrix} 6k_1 & 1 & 0 \\ 6k_2 - 3 & -2 & 1/2 \\ 6k_3 - 40 & -10 & -4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico dell'osservatore</u> risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (6 - 6k_1)\lambda^2 + (16 - 36k_1 - 6k_2)\lambda + 32 - 78k_1 - 24k_2 - 3k_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K:

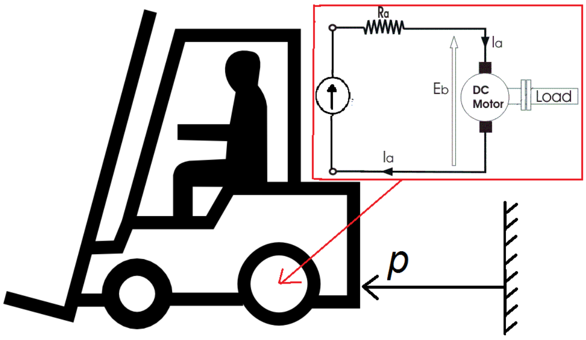
$$\begin{aligned} 6 - 6k_1 &= 18 \\ 16 - 36k_1 - 6k_2 &= 108 \\ 32 - 78k_1 - 24k_2 - 3k_3 &= 216 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$K = [\; -2 \quad -10/3 \quad 52/3 \;]^T$$

ESERCIZIO 4.

Un carrello elevatore azionato da un motore elettrico comandato in corrente, del tipo schematizzato nella figura seguente:



risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si calcoli la corrispondente funzione di trasferimento del sistema considerato.

RISPOSTA:

Ricordando che la funzione di trasferimento è legata alle matrici del sistema dalla formula:

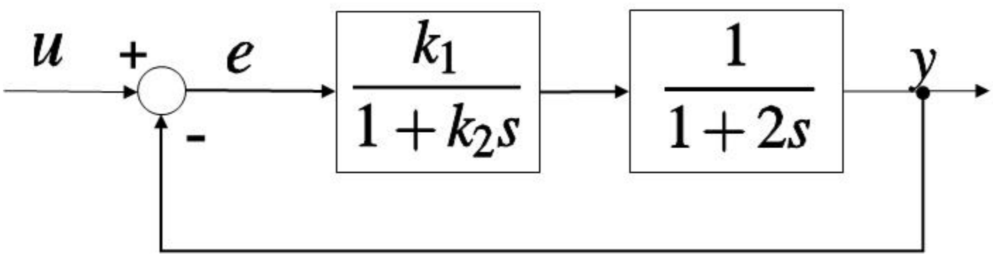
$$G(s) = C\ (sI - A)^{-1}\ B$$

risulta:

$$G(s) = 2\ /\ (\ s^2 + 3\ s\ )$$

ESERCIZIO 5.

Dato il seguente sistema in retroazione:



si progettino i valori di k_1 e k_2 tali per cui il sistema ad anello chiuso risulti avere tempo di assestamento T_a = 0,4 secondi e pulsazione naturale ω_n **= 2,5** rad/s.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta:

$$2k_2s^2 + (k_2+2)s + k_1 + 1$$

Dividendo tutti i termini per $2k_2$, è possibile confrontarlo con il denominatore tipico di un generico sistema del secondo ordine:

$$s^2 + \frac{k_2+2}{2k_2}s + \frac{k_1+1}{2k_2} = s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$$

Ricordando che per i sistemi del secondo ordine:

$$T_a = \frac{3}{\delta\omega_n}$$

risulta che il coefficiente del termine di primo grado deve essere = 15, perciò

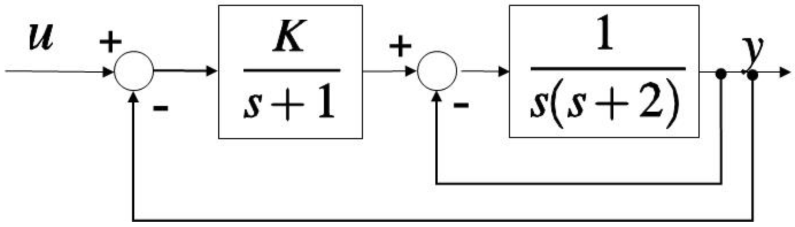
$$k_2 = 2/29$$

mentre il coefficiente costante deve essere = 6,25 (quadrato della pulsazione naturale), perciò

$$k_1 = -4/29$$

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi della seguente figura:



determinare l'intervallo dei valori di K per i quali il sistema complessivo risulti asintoticamente stabile

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso, ottenuto risolvendo i due anelli di retroazione in cascata, risulta:

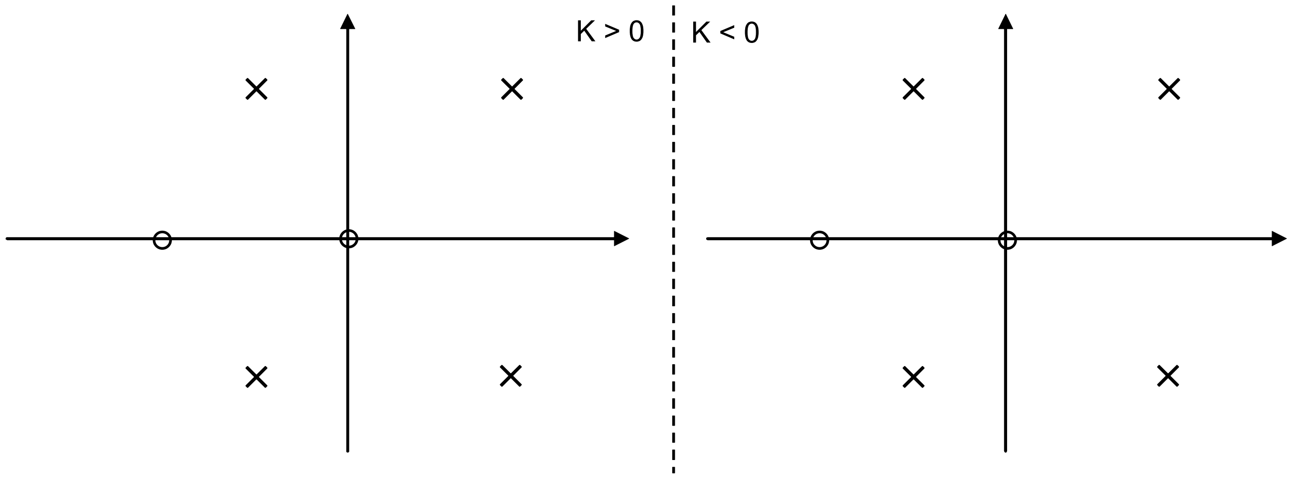
$$s^3 + 3\,s^2 + 3\,s + 1 + K$$

Applicando a quest'ultimo il criterio di Routh si ottiene la condizione:

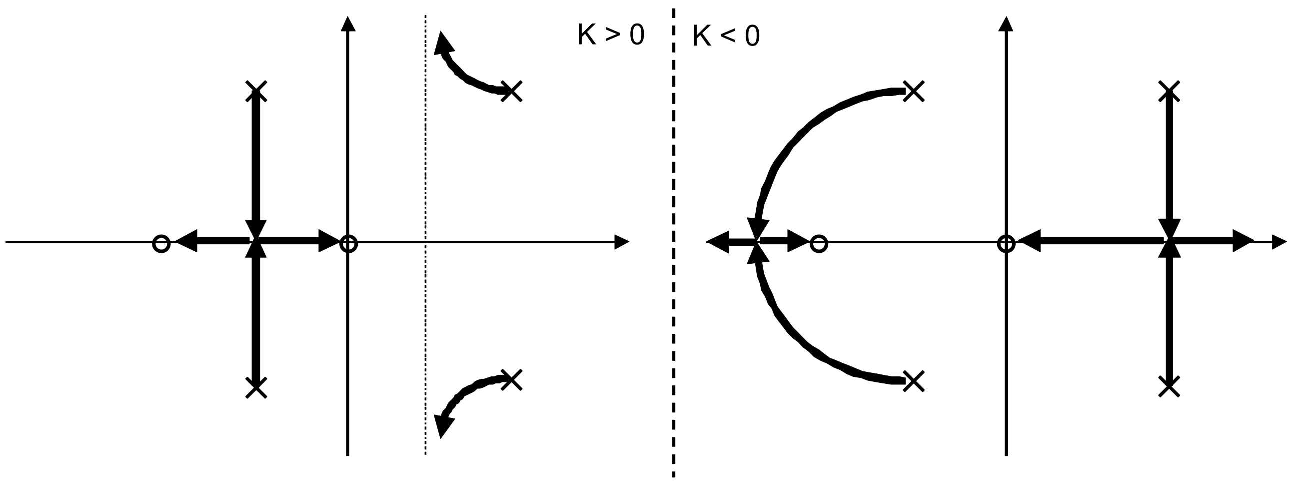
$$-1 < K < 8$$

ESERCIZIO 7.

Si tracci l'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema con poli (x) e zeri (o) della funzione di trasferimento d'anello come indicato in figura:

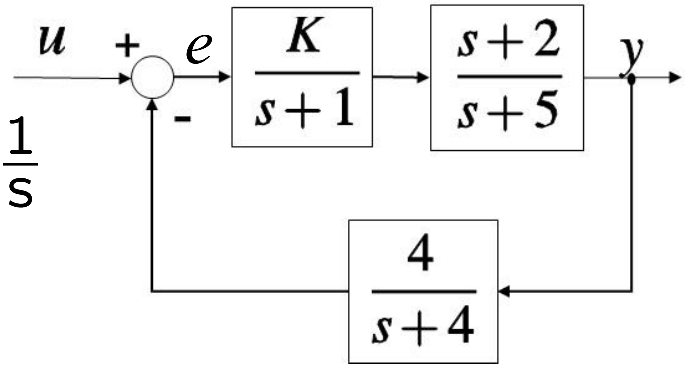


RISPOSTA:



ESERCIZIO 8.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi della seguente figura



$$u(s) = \frac{1}{s}$$

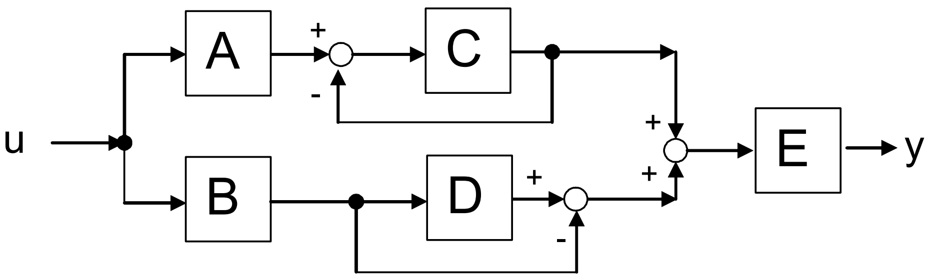
si determini il valore di K tale per cui l'errore a regime risulti $e(\infty) = 0,2$

RISPOSTA:

$$K = 10$$

ESERCIZIO 9.

Si determini la funzione di trasferimento del sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

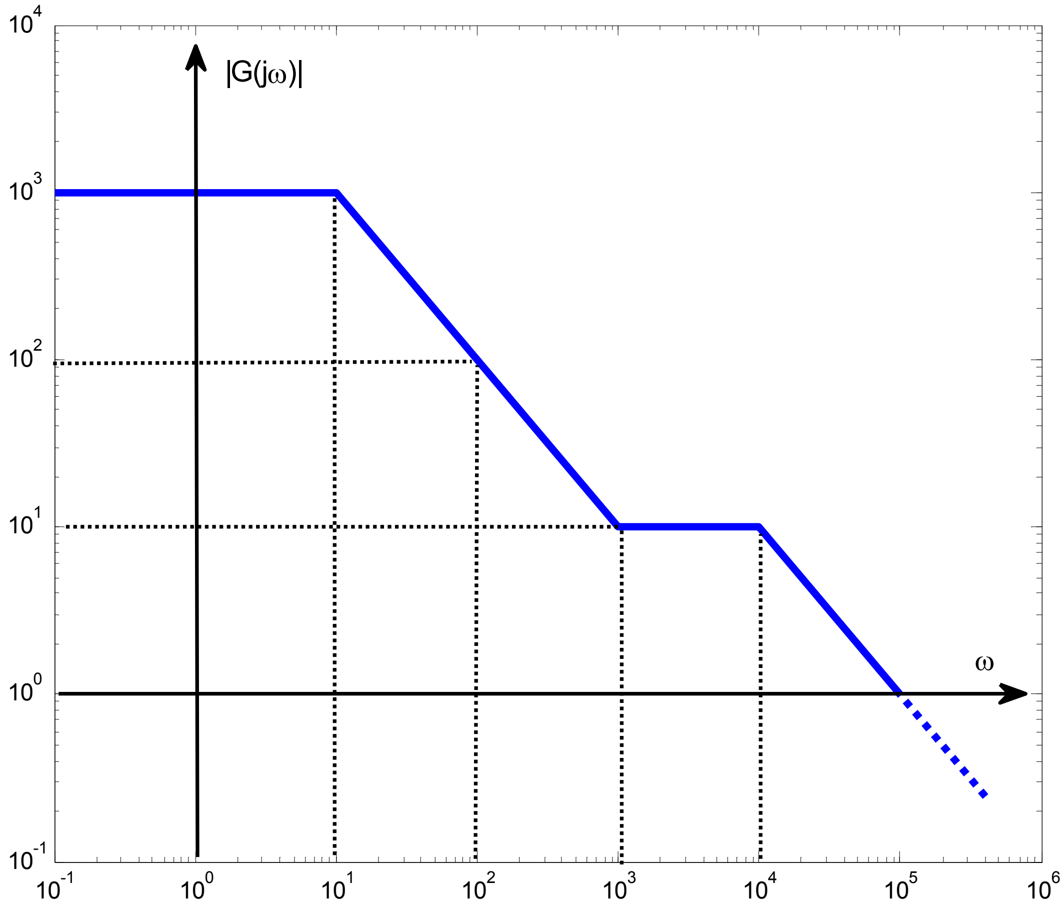


RISPOSTA:

Y / U = [A C / (1 + C) + B (D – 1)] E

ESERCIZIO 10.

Dato il seguente diagramma di Bode, si determini la funzione di trasferimento G(s), supposta a fase minima:



RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{1000\left(1+\frac{s}{10^3}\right)}{\left(1+\frac{s}{10}\right)\left(1+\frac{s}{10^4}\right)}$$