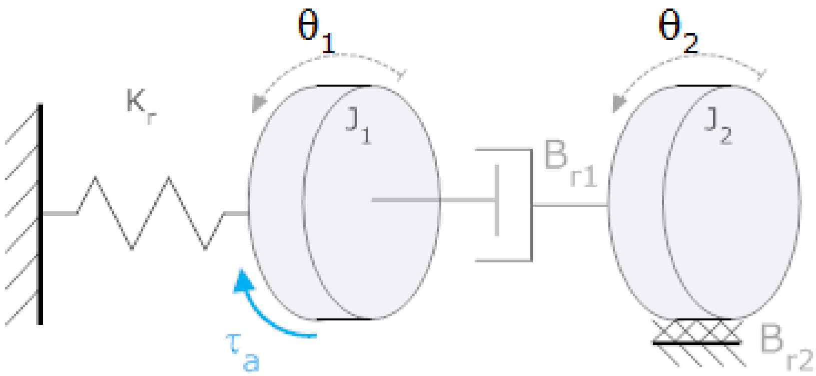
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 10 novembre 2017

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il seguente sistema meccanico costituito da due cilindri rotanti accoppiati:



Dall’analisi di bilancio delle forze generalizzate applicate ai due cilindri, si ottengono le seguenti equazioni differenziali:

$$J_1\ddot{\theta}_1 + B_{r1}\dot{\theta}_1 + K_r\theta_1 - B_{r1}\dot{\theta}_2 = -\tau_a$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (B_{r2} + B_{r1})\dot{\theta}_2 - B_{r1}\dot{\theta}_1 = 0$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

considerando le seguenti scelte per gli elementi del vettore di stato, per l’ingresso e per l’uscita:

$$x_1 = \theta_1;\; x_2 = \dot{\theta}_1;\; x_3 = \dot{\theta}_2;\; u = \tau_a;\; y = \theta_1$$

RISPOSTA:

Occorre

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che le derivate della seconda e della terza variabile di stato corrispondono a:
  $\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_1$ e $\dot{x}_3 = \ddot{\theta}_2$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{K_r}{J_1}x_1 - \frac{B_{r1}}{J_1}x_2 + \frac{B_{r1}}{J_1}x_3 - \frac{1}{J_1}u \\
\dot{x}_3 &= \frac{B_{r1}}{J_2}x_2 - \frac{B_{r2}+B_{r1}}{J_2}x_3
\end{aligned}$$

Dalle quali risultano le matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K_r}{J_1} & -\frac{B_{r1}}{J_1} & \frac{B_{r1}}{J_1} \\ 0 & \frac{B_{r1}}{J_2} & -\frac{B_{r2}+B_{r1}}{J_2} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e poiché $y = \theta_1 = x_1$, l'uscita non dipende dall'ingresso ($D = 0$, sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$J_1 = 0{,}2$; $J_2 = 0{,}1$; $K_r = 2$; $B_{r1} = 0{,}2$; $B_{r2} = 0{,}1$;

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema di interesse per l'analisi di raggiungibilità:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 5 \\ -5 & 5 & 35 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** / ~~NON E'~~ completamente controllabile.

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -2, -3, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = \lambda^3+6\lambda^2+11\lambda+6 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \;\; h_2 \;\; h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -5h_1 - 10 & -5h_2 - 1 & 1 - 5h_3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3 + (5h_2 + 4)\lambda^2 + (5h_1 + 15h_2 + 10h_3 + 11)\lambda + 15h_1 + 30 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

$$\begin{aligned} 5h_2 + 4 &= 6 \\ 5h_1 + 15h_2 + 10h_3 + 11 &= 11 \\ 15h_1 + 30 &= 6 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -8/5 \quad 2/5 \quad 1/5\ ]$$

ESERCIZIO 4.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t)$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si determini la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema considerato.

RISPOSTA:

Ricordando che la funzione di trasferimento è legata alle matrici del sistema dalla formula:

$$G(s) = C\,(sI - A)^{-1}\,B$$

e considerando che la matrice al centro del prodotto risulta:

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+3)}\begin{bmatrix} s+3 & 0 \\ 1 & s+1 \end{bmatrix}$$

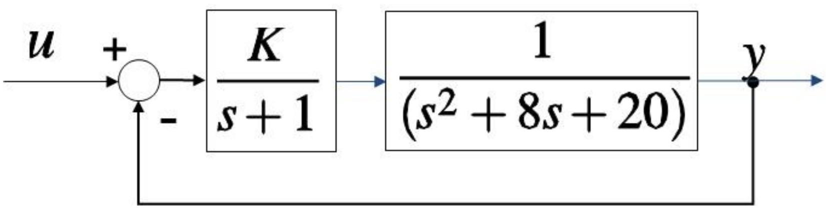
si ottiene come risultato finale:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s^2+4s+3}$$

Si noti che i due poli della funzione di trasferimento corrispondono ai due autovalori della matrice A di partenza (condizione tipica di un sistema completamente controllabile e completamente osservabile).

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

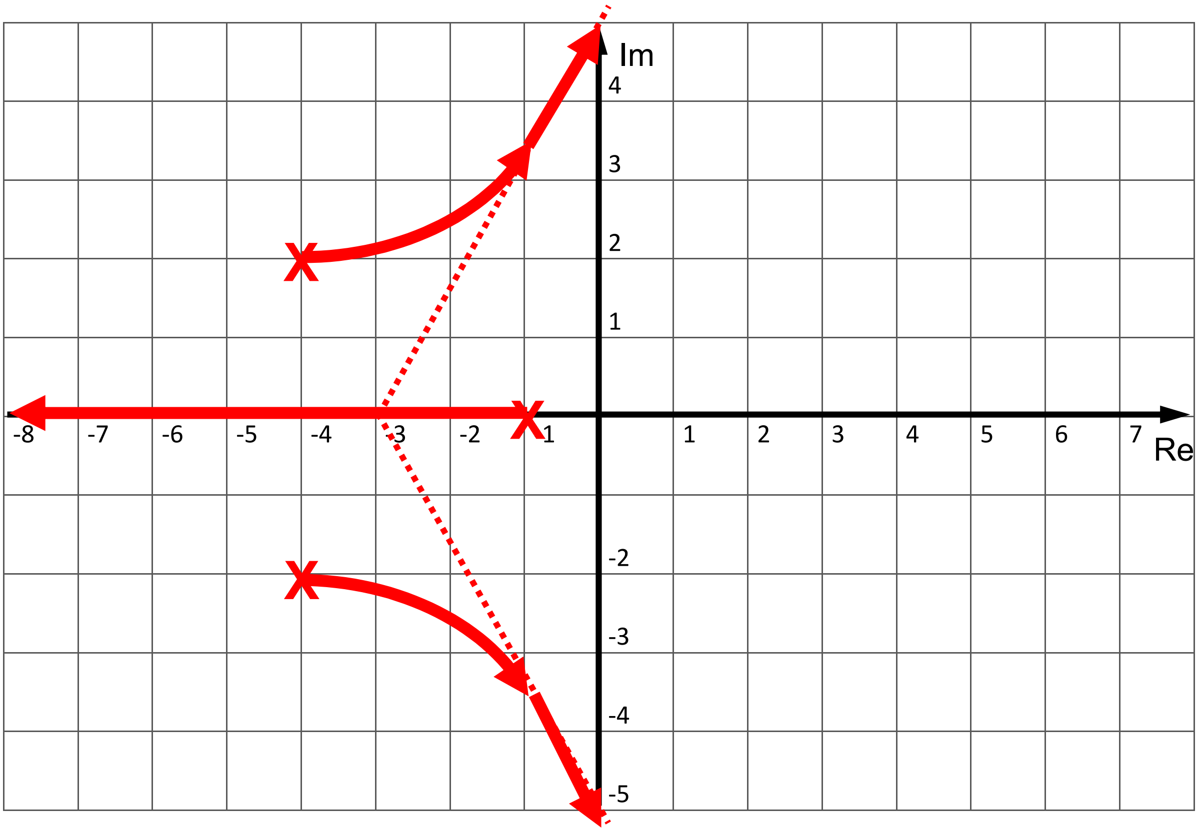


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello non ha alcuno zero ($n_z = 0$), ma ha tre poli ($n_p = 3$) rispettivamente in -1, -4-2i e -4+2i. Pertanto il luogo ha tre asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 3$), disposti con angoli di $\pi/3$, π e $5/3*\pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -3$$



ESERCIZIO 6.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 5, si determini l'intervallo di valori di K per i quali il sistema risulti <u>asintoticamente stabile</u>.

RISPOSTA:

L'intervallo di stabilità per i valori di K si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$D_{cl}(s) = s^3 + 9s^2 + 28s + 20 + K$$

Dalla tabella di Routh si ottengono due vincoli per K, cioè $K > -20$ e $K < 232$, perciò:

$$-20 < K < 232$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Due sistemi dinamici, lineari e stazionari, asintoticamente stabili, collegati in cascata (i.e. in serie tra loro) danno luogo ad un sistema:

O semplicemente stabile
X asintoticamente stabile
O completamente controllabile
O completamente osservabile

DOMANDA 2.
Una forma minima per un sistema dinamico, lineare e stazionario, risulta di ordine minore a quello del sistema quando:

O il polinomio minimo è di grado inferiore a quello caratteristico
X esiste una parte non raggiungibile e non osservabile
X il sistema non è completamente osservabile
O il sistema non è completamente controllabile

DOMANDA 3.
Un sistema dinamico lineare e stazionario caratterizzato dalla seguente matrice di transizione:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

O è completamente controllabile
O è instabile
X è semplicemente stabile
O è asintoticamente stabile

NOTA: *Il termine unitario nella prima riga e prima colonna corrisponde all'esponenziale* e^{0t}*, cioè ad un autovalore nullo, mentre negli altri termini compare l'esponenziale corrispondente ad un autovalore = -2. Non essendo possibile che ci siano altri modi (matrice* A *e corrispondente* e^{At} *di dimensione* 2x2*) si può affermare con certezza che il sistema è semplicemente stabile. Dalla sola informazione sull'esponenziale di matrice non si può affermare nulla in merito alla controllabilità e/o osservabilità del sistema.*

DOMANDA 4.
Un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ pari a:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s+2)}$$

risulta essere:

O asintoticamente stabile
O a fase minima
O puramente dinamico
X semplicemente stabile

DOMANDA 5.
Il sistema lineare e stazionario la cui funzione di trasferimento G(s) ha tutti i poli posizionati sull'asse immaginario, ciascuno avente molteplicità unitaria:
O è instabile
O è asintoticamente stabile
X è semplicemente stabile
O dipende dal posizionamento degli zeri

DOMANDA 6.
Il tempo di assestamento del sistema avente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\delta\omega_n s+\omega_n^2}$$

X diminuisce all'aumentare di ω_n

O aumenta all'aumentare di ω_n

X diminuisce all'aumentare di δ

O aumenta all'aumentare di δ

DOMANDA 7.
In una rete anticipatrice, all'aumentare di ω da zero all'infinito:
O agisce prima il polo e poi lo zero
X agisce prima lo zero e poi il polo
X la fase è sempre positiva
O la fase è sempre negativa

DOMANDA 8.
Si vuole progettare un controllo in retroazione per il sistema avente funzione di trasferimento:

$$G(\mathrm{s}) = \frac{1}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+2)}$$

in modo da ottenere errore a regime nullo per ingressi a rampa. Il controllore per tale sistema:

X può essere un regolatore PI
O può essere un regolatore PD
O deve avere almeno due poli nell'origine
X deve avere almeno un polo nell'origine

NOTA: *Per avere errore a regime nullo con ingressi a rampa, in un sistema in retroazione, è necessario che la funzione di trasferimento di anello abbia almeno due poli nell'origine. Tale funzione di trasferimento di anello sarà il prodotto di quella indicata nella domanda per quella del controllore. La prima ha già un polo nell'origine, perciò affinchè la funzione di trasferimento di anello ne abbia almeno due, il controllore deve aver almeno uno. Ovviamente un controllore PI (Proporzionale-Integrale) ha appunto un polo nell'origine.*