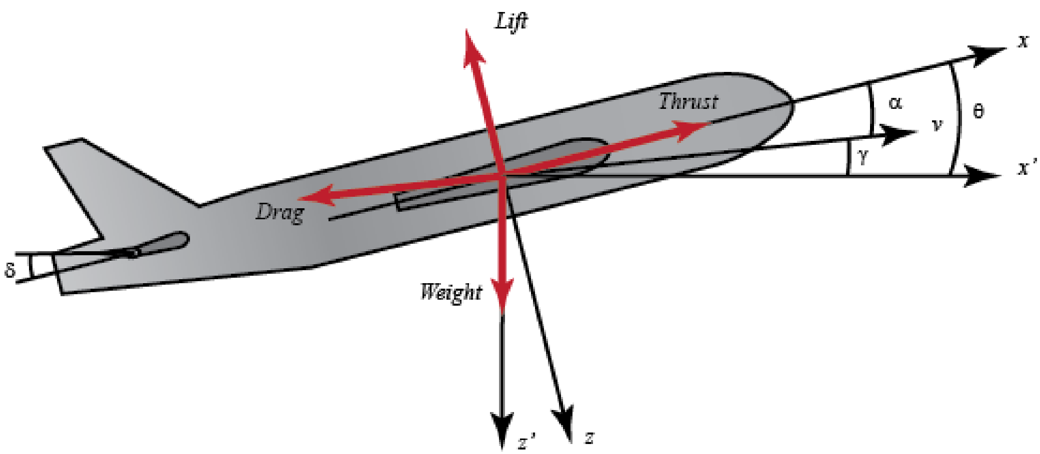
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 20 luglio 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri il modello semplificato della dinamica longitudinale di un aereo, con particolare riferimento al movimento rispetto all’angolo di beccheggio (*pitch angle*) schematizzato dalla seguente figura:



[Fonte: Control Tutorials for Matlab&Simulink, http://ctms.engin.umich.edu]

e descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{\alpha} = -2\alpha + C_q q + 2\delta$$

$$\dot{q} = -\alpha - 4q + \delta$$

$$\dot{\theta} = C_q q$$

nelle quali α è il cosiddetto angolo di attacco, q è la velocità dell’angolo di beccheggio, θ è l’angolo di beccheggio e δ è l’inclinazione dell’ala di controllo posteriore, mentre C_q **è una costante che va sostituita con l’ULTIMA cifra (a destra) del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 0, la si sostituisca con 5)**.

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = \alpha;\ x_2 = q;\ x_3 = \theta;\ u = \delta;\ y = \theta;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

N.B.: tutte le soluzioni richieste vanno determinate sostituendo fin dall'inizio C_q con l'ULTIMA cifra (a destra) del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 0, la si sostituisca con 5).

RISPOSTA:

N.B.: fornita in funzione del numero di matricola dello studente.

Le equazioni sono di fatto già in forma compatibile con la scrittura del modello differenziale ingresso-stato-uscita, con matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & C_q & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & C_q & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato considerando l'uscita $y = \theta = x_1$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso D = 0 (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la terza variabile dal vettore di stato è:

$$C = [\,0 \quad 0 \quad 1\,]$$

Per l'analisi di controllabilità, la matrice di interesse è:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & C_q - 4 & 8 - 8C_q \\ 1 & -6 & 28 - C_q \\ 0 & C_q & -6C_q \end{bmatrix}$$

Che risulta avere rango(P) = 2 (cioè sistema NON completamente controllabile) per qualsiasi possibile valore di C_q, quindi per qualsiasi numero di matricola dello studente. Infatti, anche considerando l'espressione simbolica riportata sopra si può notare che:

- Indicando con p_1, p_2 e p_3 le tre colonne di P a partire da sinistra, l'elemento della terza riga della colonna p_3 corrisponde a quello della colonna p_2, se moltiplicato per -6.

- Dato il fattore moltiplicativo -6 per la colonna p_2, si può verificare che sommando a questa la p_1 moltiplicata per $(-\ 8\ -\ C_q)$, fattore che può essere ottenuto analizzando la combinazione linerare degli elementi nella prima riga, l'intera colonna p_3 risulta linearmente dipendente da p_1 e p_2
  (i.e. $p_1 = (-\ 8 - C_q)\ p_1 - 6\ p_2$)

ESERCIZIO 2.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 1, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -1, -2, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché la matrice di raggiungibilità ha rango 2, (v. Esercizio 1) è possibile assegnare solo due degli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -1$, mentre l'altro devono essere: $\lambda_2 = -2$. Il terzo autovalore, non assegnabile, risulterà determinato dalla struttura della matrice $A + B\,H$.

Con tale scelta, il <u>polinomio caratteristico desiderato</u> per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \\ &= (\lambda+1)(\lambda+2) = \lambda^2+3\lambda+2 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1\ \ h_2\ \ h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A + BH = \begin{bmatrix} 2h_1 - 2 & C_q + 2h_2 & 2h_3 \\ h_1 - 1 & h_2 - 4 & h_3 \\ 0 & C_q & 0 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il <u>polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione</u> risulta:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\
&= \lambda\left\{\lambda^2 + (6-2h_1-h_2)\lambda + \left[C_q + 8 - (8+C_q)h_1 - C_q h_3\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Come si può notare, il fatto che risulti il termine costante nullo e quindi si possa raccogliere un termine λ significa che il sistema ad anello chiuso ha un autovalore $= 0$ non modificabile dal controllo. Uguagliando quindi i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nella parte di polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione dipendente da H si ottengono i vincoli di progetto:

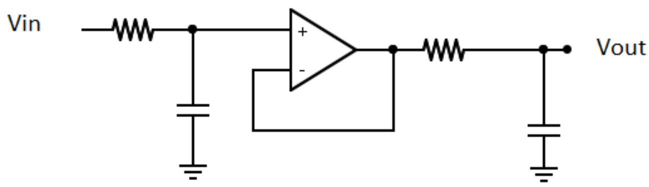
$$
\begin{aligned}
6-2h_1-h_2 &= 3 \\
8+C_q-(8+C_q)h_1-C_q h_3 &= 2
\end{aligned}
$$

NOTA BENE: il sistema di equazioni da risolvere ha 2 vincoli e 3 incognite, pertanto risulta avere <u>infinite</u> soluzioni. La struttura delle soluzioni dipende dall'ordine con il quale si scelga di ricavare una incognita per ottenere le altre. AD ESEMPIO, una possibile scelta di comodo può essere ricavare h_2 e h_3 in funzione di h_1 (che risulterà quindi arbitrario), in quanto questa compare in entrambe le equazioni di vincolo:

$$H = [\ \text{arb.} \quad 3 - 2h_1 \quad (C_q-8h_1-C_qh_1+6)/C_q]$$

ESERCIZIO 3.

Un sistema costituito dal circuito elettronico del tipo mostrato a fianco risulta avere il seguente modello nello spazio degli stati:



$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\ y(t) = Cx(t)$$

con:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -P_s \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove P_s **è una costante che va sostituita con la PENULTIMA cifra (a destra) del numero di matricola dello studente (se questa cifra è 1, la si sostituisca con 2)**.

Si determini la risposta impulsiva del sistema considerato.

RISPOSTA:

La risposta impulsiva del sistema è calcolabile con la formula:

$$W(t) = C\, e^{At}\, B =$$

Notando che gli autovalori della matrice A sono -1 e - P_s ed applicando il metodo del polinomio interpolante per il calcolo dell'esponenziale della matrice A, si ottiene:

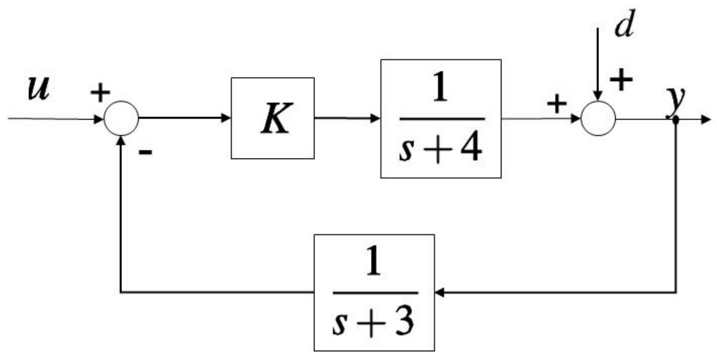
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{P_s - 1}\left(e^{-t} - e^{-P_s\, t}\right) & e^{-P_s\, t} \end{bmatrix}$$

Pertanto il risultato finale **in funzione del numero di matricola dello studente** è:

$$W(t) = \frac{1}{P_s - 1}\left(e^{-t} - e^{-P_s\, t}\right)$$

ESERCIZIO 4.

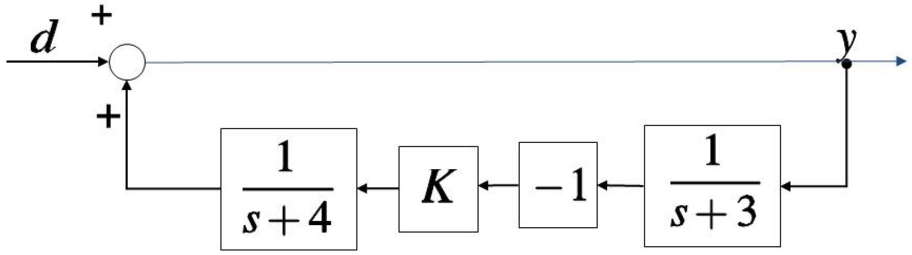
Dato il sistema costituito dal seguente diagramma a blocchi:



si determini il valore di K tale per cui y(t) → 0,1 per t → ∞, imponendo u(t) = 0 ed applicando un gradino unitario al segnale d(t) (cioè: D(s) = 1 / s).

RISPOSTA:

Ponendo u(t) = 0 e ridisegnando il diagramma a blocchi in modo da evidenziare la relazione ingresso uscita tra y e d, si ottiene

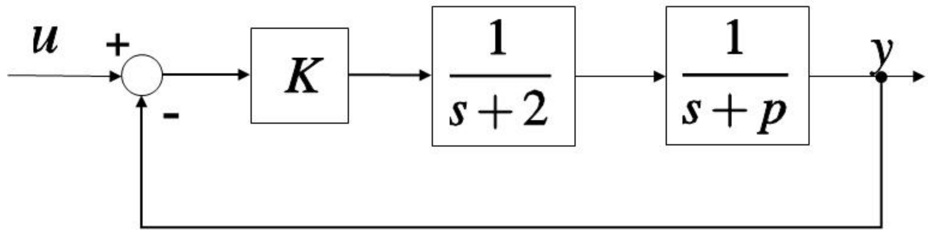


Si noti che il nodo sommatore a sinistra nel diagramma iniziale è stato sostituito con il blocco -1 nel ramo di retroazione, perciò di fatto si tratta ancora di un anello con retroazione negativa. Risolvendo l'anello per ottenere la funzione di trasferimento $G_{cl}(s)$, applicando il teorema del valore finale al segnale $Y(s) = G_{cl}(s)\ D(s)$ ed imponendo il vincolo fornito dal testo si ottiene:

$$K = 108$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema costituito dal diagramma a blocchi della seguente figura:



si progettino i valori di K e p in modo che il sistema in retroazione abbia tempo di assestamento $T_a = 3$ secondi e coefficiente di smorzamento $\delta = 0{,}1$

RISPOSTA:

Il denominatore ad anello chiuso risulta:

$$s^2 + (p + 2)\ s + 2\ p + K$$

che è direttamente confrontabile con quello tipico di un sistema del secondo ordine ponendo i vincoli:

$$p + 2 = 2\ \delta\ \omega_n \qquad 2\ p + K = \omega_n^2$$

Il primo dei due permette di calcolare p, poiché il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine è:

$$T_a = \frac{3}{\delta\,\omega_n}$$

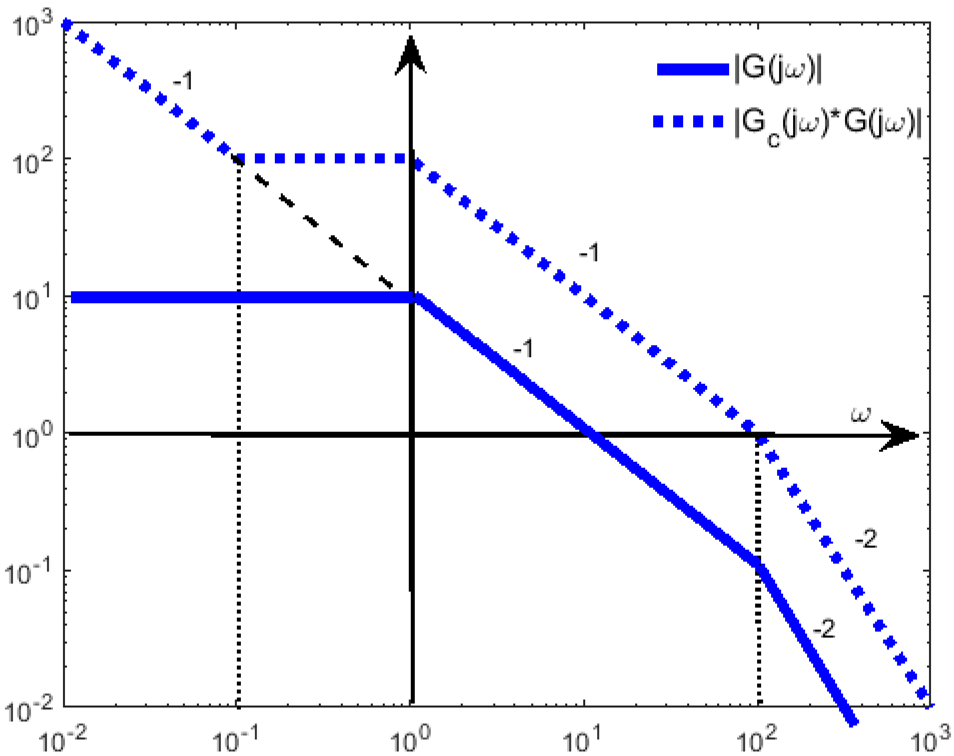
$$\Rightarrow \delta\,\omega_n = 1 \;\Rightarrow\; p + 2 = 2 \;\Rightarrow\; p = 0$$

Mentre imponendo il coefficiente di smorzamento richiesto si ha che

$$\omega_n = 10 \;\Rightarrow\; \omega_n^2 = 100 \;\Rightarrow\; K = 100$$

ESERCIZIO 6.

Dato il diagramma di Bode dei moduli descritto dalla seguente figura:



Si calcolino $G(s)$ e $G_c(s)$, considerate entrambe a fase minima.

RISPOSTA:

$$G(s) = \frac{10}{(1+s)\left(1+\frac{s}{100}\right)}$$

$$G_C(s) = \frac{\left(1+\frac{s}{10-1}\right)}{s}$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Una retroazione uscita-ingresso per un sistema dinamico, lineare e stazionario, permette di modificarne gli autovalori della parte:

O osservabile-ricostruibile, in modo arbitrario
O raggiungibile-controllabile, in modo arbitrario
O raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile, in modo arbitrario
X raggiungibile-controllabile e osservabile-ricostruibile, ma non in modo arbitrario

DOMANDA 2.
Il polinomio minimo di un sistema dinamico, lineare e stazionario, a tempo continuo, è dato da:

$$\alpha(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2$$

Tale sistema:

O è nel complesso semplicemente stabile
X ha almeno un modo asintoticamente stabile
X ha almeno un modo semplicemente stabile
X ha almeno un modo instabile

DOMANDA 3.
Una struttura meccanica costituita da sole masse e molle ideali (senza attriti), è un sistema:

O certamente non raggiungibile-controllabile
O instabile
X semplicemente stabile
O asintoticamente stabile

NOTA: *una struttura meccanica nella quale non vi sia dissipazione di energia, legata alla presenza di attriti, non può essere asintoticamente stabile, ma solo stabile semplicemente. Con le informazioni della domanda non si può affermare nulla sulla controllabilità della rete.*

DOMANDA 4.
Un sistema descritto dal modello matematico $\dot{x}(t) = u(t); \quad y(t) = x(t)$

X è completamente raggiungibile
X è completamente osservabile
X è semplicemente stabile
O è asintoticamente stabile

DOMANDA 5.
Il tempo di assestamento (al +/- 5%) del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

risulta essere

X $T_a = 3/2$
O $T_a = 3$
O $T_a = 2$
O $T_a = 1$

DOMANDA 6.
Si indichi quali dei seguenti funzioni di trasferimento sono a fase minima:

O $G(s) = e^{-t_0 s}$

O $G(s) = \frac{s+1}{s-2}$

O $G(s) = \frac{s-1}{s+2}$

X $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$

DOMANDA 7.
La risposta del sistema avente la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$$

O ha un valore di regime pari a $1/\tau$
X ha un valore di regime pari a 1
X per t = 0+ ha una pendenza pari a $1/\tau$
O per t = 0+ ha una pendenza pari a τ

DOMANDA 8.
Una rete anticipatrice, $G(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$ fornisce un anticipo di fase

X a tutte le pulsazioni $\omega \in]-\infty; +\infty[$

O solo per $\omega < \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$

O solo per $\omega > \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$

O mai