

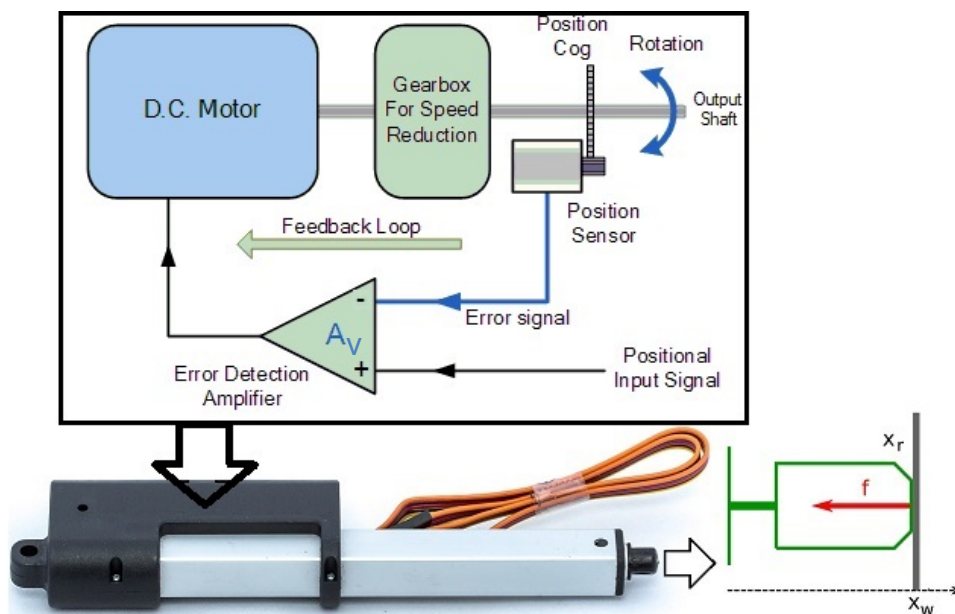
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 29 gennaio 2018

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si vuole realizzare un sistema robotico, costituito da un attuatore lineare che integra il circuito elettronico di regolazione della posizione, al fine di mantenere una forza di spinta desiderata nel punto di contatto tra il robot ed una superficie dell'ambiente, come mostrato nella figura seguente:



Il modello dinamico di tale sistema si ottiene unendo il modello del circuito elettrico (di tipo RL) di un motore a corrente continua (DC motor), la cui tensione è generata dall'amplificatore di controllo in modo proporzionale alla differenza tra la posizione misurata e la posizione desiderata (ingresso del sistema), con il bilancio delle forze agenti sullo stelo dell'attuatore. In particolare, si ipotizza che la posizione della superficie di contatto x_w **sia fissata in 0** e che la forza di contatto, misurabile, sia proporzionale alla differenza tra la posizione dello stelo x_r e x_w . Per semplicità, si considera anche che i parametri del motore includano già il rapporto di riduzione e di trasformazione del moto del motore DC da rotativo a lineare.

In tali condizioni, le equazioni che descrivono il modello dinamico del sistema sono le seguenti:

$$L_a \dot{I}_a + R_a I_a + k_m \dot{x}_r = A_v (x_i - x_r)$$

$$m \ddot{x}_r + b \dot{x}_r + f = k_m I_a$$

$$f = k_w(x_r - x_w) = k_w x_r$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$$x_1 = I_a; x_2 = x_r; x_3 = \dot{x}_r; u = x_i; y = f;$$

RISPOSTA:

Occorre:

- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{R_a}{L_a}x_1 - \frac{A_v}{L_a}x_2 - \frac{k_m}{L_a}x_3 + \frac{A_v}{L_a}u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \frac{k_m}{m}x_1 - \frac{k_w}{m}x_2 - \frac{b}{m}x_3\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{A_v}{L_a} & -\frac{k_m}{L_a} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_m}{m} & -\frac{k_w}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{A_v}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=f=k_w x_2$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1×3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & k_w & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

$$R_a = 0,4; \quad L_a = 0,2; \quad k_m = 0,4; \quad A_v = 4;$$

$$m = 0,4; \quad b = 0,4; \quad k_w = 2;$$

e si verifichi se il sistema sia o meno **completamente osservabile**, calcolando la matrice di **osservabilità** ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema che interessano per l'analisi di osservabilità (i.e. A e C) diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 20 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$Q^T = \begin{bmatrix} C^T & A^T C^T & (A^T)^2 C^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -10 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\text{rango}(Q^T) = 3$$

Perciò il sistema E' ~~NON È~~ completamente osservabile

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti un osservatore in catena chiusa dello stato (osservatore identità), cioè del tipo:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + K(C\hat{x}(t) - y(t))$$

i cui autovalori assegnabili risultino tutti reali ed uguali tra loro (se quelli assegnabili sono più di uno), con tempo di assestamento (al 5%) pari a $T_a = 0,5$ secondi.

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente osservabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori dell'osservatore in catena chiusa. Gli autovalori desiderati sono determinati dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 0,5$ ed autovalori tutti uguali tra loro: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -6$
 Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per l'osservatore deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = \\ &= (\lambda + 6)^3 = \lambda^3 + 18\lambda^2 + 108\lambda + 216 \end{aligned}$$

La matrice K dell'osservatore deve essere di dimensione 3×1 , cioè $K = [k_1 \ k_2 \ k_3]^T$,
 pertanto la matrice dell'osservatore con i coefficienti incogniti di K risulta:

$$A + KC = \begin{bmatrix} -2 & 2k_1 - 20 & -2 \\ 0 & 2k_2 & 1 \\ 1 & 2k_3 - 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico dell'osservatore risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I - A - KC) = \\ &= \lambda^3 + (3 - 2k_2)\lambda^2 + (9 - 6k_2 - 2k_3)\lambda + 30 - 2k_1 - 8k_2 - 4k_3 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico dell'osservatore si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di K :

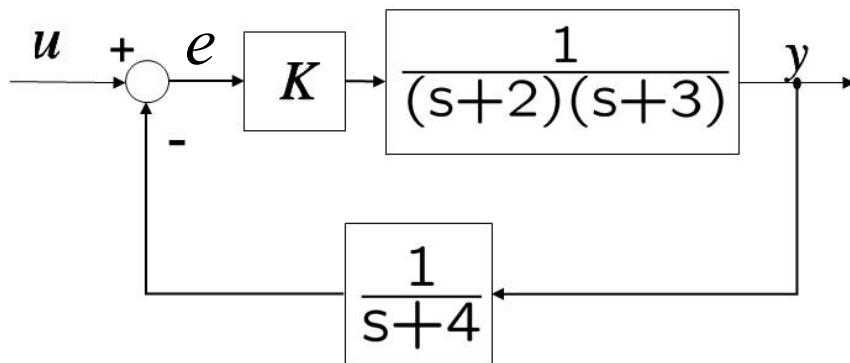
$$\begin{aligned} 3 - 2k_2 &= 18 \\ 9 - 6k_2 - 2k_3 &= 108 \\ 30 - 2k_1 - 8k_2 - 4k_3 &= 216 \end{aligned}$$

risolti i quali si ottiene $k_1 = -9$, $k_2 = -15/2$ e $k_3 = -27$, perciò la soluzione finale è:

$$K = [-9 \quad -15/2 \quad -27]^T$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dallo schema a blocchi mostrato nel seguito, si calcoli il valore di K tale per cui l'errore a regime ($e(t)$) in risposta ad un gradino di ampiezza unitaria ($U(s) = 1/s$) risulti essere pari a $e(\infty) = 0,1$.

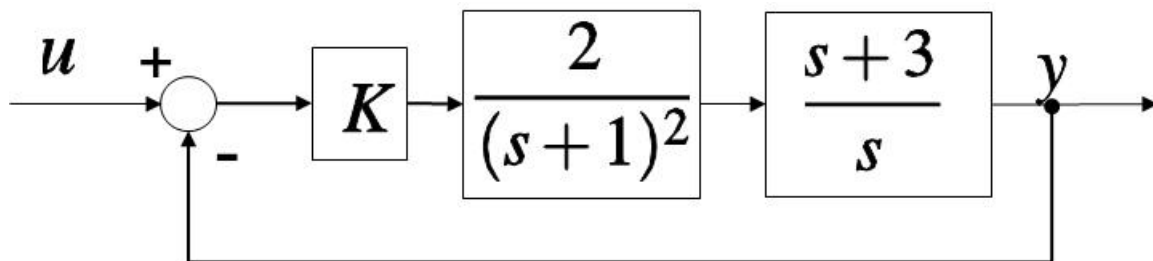


RISPOSTA:

$$K = 216$$

ESERCIZIO 5.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



Si determinino i valori di K che rendono il sistema asintoticamente stabile.

RISPOSTA:

Applicando il criterio di Routh al polinomio ottenuto da $1 + K G_1(s)G_2(s)$, si ottiene

$$0 < K < 1$$

ESERCIZIO 6.

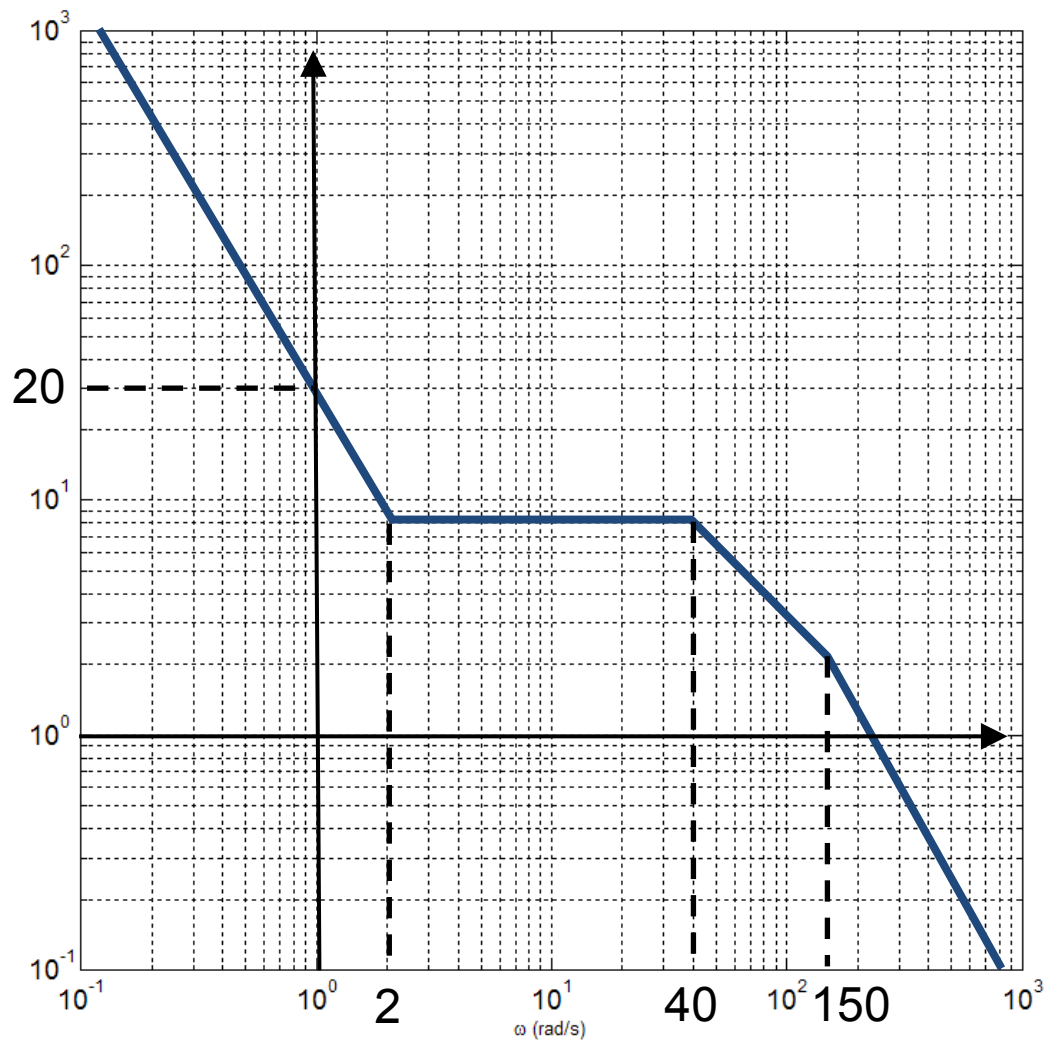
Data la seguente funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{20(1+\frac{s}{2})^2}{s^2(1+\frac{s}{40})(1+\frac{s}{150})}$$

Si disegni il diagramma di Bode delle ampiezze, considerando ovviamente solo la linea spezzata che ne determina l'approssimazione asintotica.

Si noti che entrambi gli assi del piano predisposto per il tracciato del diagramma sono in scala logaritmica (ma che il valore sull'asse delle ascisse è assoluto, NON in dB).

RISPOSTA:



TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.

Un sistema dinamico, lineare e stazionario a tempo continuo ha la matrice dinamica A di dimensione (3x3) costituita da tutti elementi nulli, matrice di distribuzione degli ingressi B (3x1) e matrice di distribuzione delle uscite C (1x3). Tale sistema:

- ☒ non è completamente raggiungibile-controllabile
- ☒ non è completamente osservabile-ricostruibile
- ☐ è asintoticamente stabile
- ☐ è instabile

DOMANDA 2.

Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{-t}x_1(0) \\x_2(t) &= e^{-2t}x_2(0)\end{aligned}$$

Il sistema considerato:

- ☐ è completamente controllabile
- ☒ può essere completamente controllabile
- ☒ è asintoticamente stabile
- ☐ è instabile

DOMANDA 3.

Una forma minima per un sistema dinamico, lineare e stazionario, risulta di ordine minore a quello del sistema stesso quando:

- ☒ il sistema non è completamente osservabile
- ☐ il sistema non è completamente raggiungibile
- ☒ esiste una parte non raggiungibile e non osservabile
- ☐ il polinomio minimo è di grado inferiore a quello caratteristico

DOMANDA 4.

L'ingresso $u(t)$ e l'uscita $y(t)$ di un sistema sono legati dalla relazione $\dot{y}(t) = u(t)$
Tale sistema:

- ☐ ha una funzione di trasferimento pari a $G(s) = Y(s) / U(s) = s$
- ☒ ha una funzione di trasferimento pari a $G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / s$
- ☐ ha una funzione di trasferimento pari a $G(s) = Y(s) / U(s) = 1 / (s+1)$
- ☒ è puramente dinamico

DOMANDA 5.

In corrispondenza di una radice multipla di ordine h , il luogo delle radici:

- ☒ presenta h rami entranti
- ☐ ha certamente il passaggio di un asintoto
- ☒ presenta h rami uscenti
- ☐ ha almeno un ramo entrante la cui tangente è parallela all'asse reale

DOMANDA 6.

Un sistema con funzione di trasferimento $G(s)$ pari a:

$$G(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{s(s+2)}$$

risulta essere:

- ☒ semplicemente stabile
- ☐ asintoticamente stabile
- ☐ a fase minima
- ☐ puramente dinamico

DOMANDA 7.

Posto $0 < b < a$, il sistema avente la funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{(s+a)}{(s+b)}$$

risulta essere:

- ☐ una rete anticipatrice a guadagno statico (i.e. $G(0)$) unitario
- ☐ una rete anticipatrice a guadagno statico (i.e. $G(0)$) non unitario
- ☐ una rete ritardatrice a guadagno statico (i.e. $G(0)$) unitario
- ☒ una rete ritardatrice a guadagno statico (i.e. $G(0)$) non unitario

DOMANDA 8.

Il regolatore standard di tipo PID, nella forma ideale:

$$C(s) = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

- ☒ non è un sistema fisicamente realizzabile
- ☐ è un sistema fisicamente realizzabile
- ☒ è caratterizzato da una coppia di zeri reali se $T_i \geq 4T_d$
- ☐ è caratterizzato da una coppia di poli reali se $T_i \geq 4T_d$