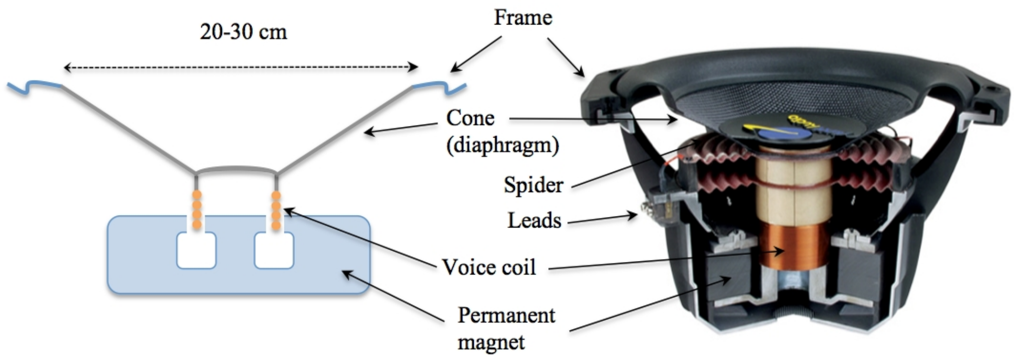
Esame di “FONDAMENTI DI AUTOMATICA” (9 CFU)

Prova scritta – 9 giugno 2017

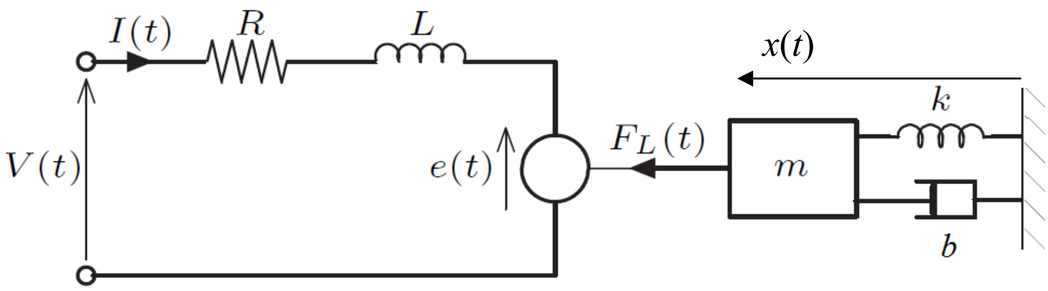
SOLUZIONE

ESERCIZIO 1.

Si consideri un altoparlante ad attrazione magnetica per la riproduzione sonora, rappresentato dalla seguente figura:



Tale dispositivo è un sistema elettromeccanico che può essere schematizzato dal diagramma seguente, che evidenzia la presenza di un circuito elettrico RL e di un gruppo massa-molla-smorzatore azionato dalla forza di attrazione magnetica F_L:



Le equazioni differenziali che descrivono il modello dinamico del sistema sono le seguenti:

$$V = RI + L\dot{I} + k_A\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + k_E x = k_A I$$

Si determini il corrispondente modello dinamico nello spazio degli stati, del tipo:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);\; y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

fissando le seguenti scelte per stato, ingresso e uscita:

$x_1 = I;\ x_2 = x;\ x_3 = \dot{x};\ u = V;\ y = x_2$

RISPOSTA:

Occorre:
- sostituire la notazione delle variabili di stato, ingresso e uscita
- notare che la derivata della seconda variabile di stato corrisponde alla terza variabile di stato: $\dot{x}_2 = x_3$

Si ottengono così le seguenti tre equazioni differenziali del primo ordine, per ciascuna derivata di una singola variabile di stato:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -\frac{R}{L}x_1 && && -\frac{k_A}{L}x_3 && +\frac{1}{L}u \\
\dot{x}_2 &= && && x_3 && \\
\dot{x}_3 &= \frac{k_A}{m}x_1 && -\frac{k_E}{m}x_2 && -\frac{b}{m}x_3 &&
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si ottiene direttamente la forma delle matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 & -\frac{k_A}{L} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_A}{m} & -\frac{k_E}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le matrici C e D si ottengono in modo immediato dall'espressione dell'uscita $y=x_2$: poiché tale uscita non dipende dall'ingresso $D = 0$ (sistema puramente dinamico) e la matrice di dimensione 1x3 che estrae la prima variabile dal vettore di stato è:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO 2.

Dato il modello ottenuto nell'Esercizio 1, si sostituiscano i seguenti valori per i parametri fisici:

m = 0,1; b = 0,4; k_E = 0,6; R = 4; L = 0,5; k_A = 0,5

e si verifichi se il sistema sia o meno completamente controllabile, calcolando la matrice di raggiungibilità ed il relativo rango.

RISPOSTA:

Le matrici del sistema diventano:

$$A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -16 & 118 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & -120 \end{bmatrix}$$

rango(P) = 3

Perciò il sistema **E'** ~~/ NON E'~~ completamente controllabile

---

ESERCIZIO 3.

Per il sistema con i valori numerici indicati nell'Esercizio 2, si progetti una retroazione stato-ingresso (i.e. $u = H\,x + v$), in modo tale che:

- gli autovalori assegnabili del sistema chiuso in retroazione siano tutti reali e distinti;
- il più lento di tali autovalori abbia tempo di assestamento (al 5%) di 0,3 secondi e gli altri assegnabili abbiano valori assoluti progressivi di una unità (es. -10, -11, ecc.).

RISPOSTA:

Poiché il sistema è completamente controllabile (v. Esercizio 2) è possibile assegnare arbitrariamente tutti e tre gli autovalori del sistema chiuso in retroazione con una retroazione stato-ingresso. Gli autovalori desiderati sono determinali dalle specifiche dell'esercizio ricordando che il tempo di assestamento al 5% del modo corrispondente ad un autovalore reale è:

$$T_a = -\frac{3}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{3}{T_a}$$

Pertanto, per avere $T_a = 0{,}3$, l'autovalore più lento deve essere pari a $\lambda_1 = -10$, mentre gli altri devono essere: $\lambda_2 = -11$, $\lambda_3 = -12$.

Con tale scelta, il polinomio caratteristico desiderato per il sistema chiuso in retroazione deve essere:

$$\begin{aligned} p_{des}(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3) = \\ &= (\lambda+10)(\lambda+11)(\lambda+12) = \lambda^3+33\lambda^2+362\lambda+1320 \end{aligned}$$

La matrice H del controllore deve essere di dimensione 1x3, cioè $H = [h_1 \quad h_2 \quad h_3]$, pertanto la matrice del sistema chiuso in retrazione con i coefficienti incogniti di H risulta:

$$A+BH = \begin{bmatrix} 2h_1-8 & 2h_2 & 2h_3-1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

Di conseguenza, il polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione risulta:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(\lambda I - A - BH) = \\ &= \lambda^3+(12-2h_1)\lambda^2+(43-10h_3-8h_1)\lambda+48-10h_2-12h_1 \end{aligned}$$

Uguagliando tra loro i coefficienti dei termini di pari grado nel polinomio caratteristico desiderato e nel polinomio caratteristico del sistema chiuso in retroazione si ottengono i 3 vincoli per determinare i 3 coefficienti incogniti di H:

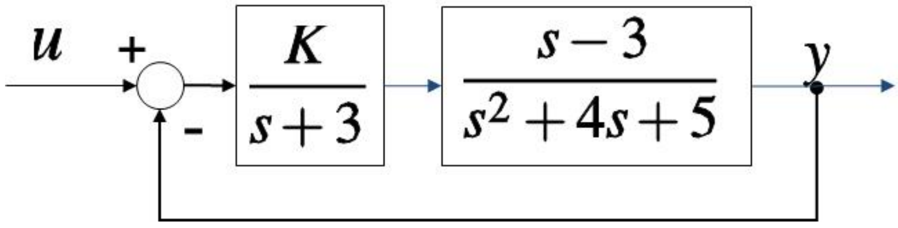
$$\begin{aligned} 12-2h_1 &= 33 \\ 43-10h_3-8h_1 &= 362 \\ 48-10h_2-12h_1 &= 1320 \end{aligned}$$

la cui soluzione finale è:

$$H = [\ -21/2 \quad -573/5 \quad -47/2\ ]$$

ESERCIZIO 4.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:

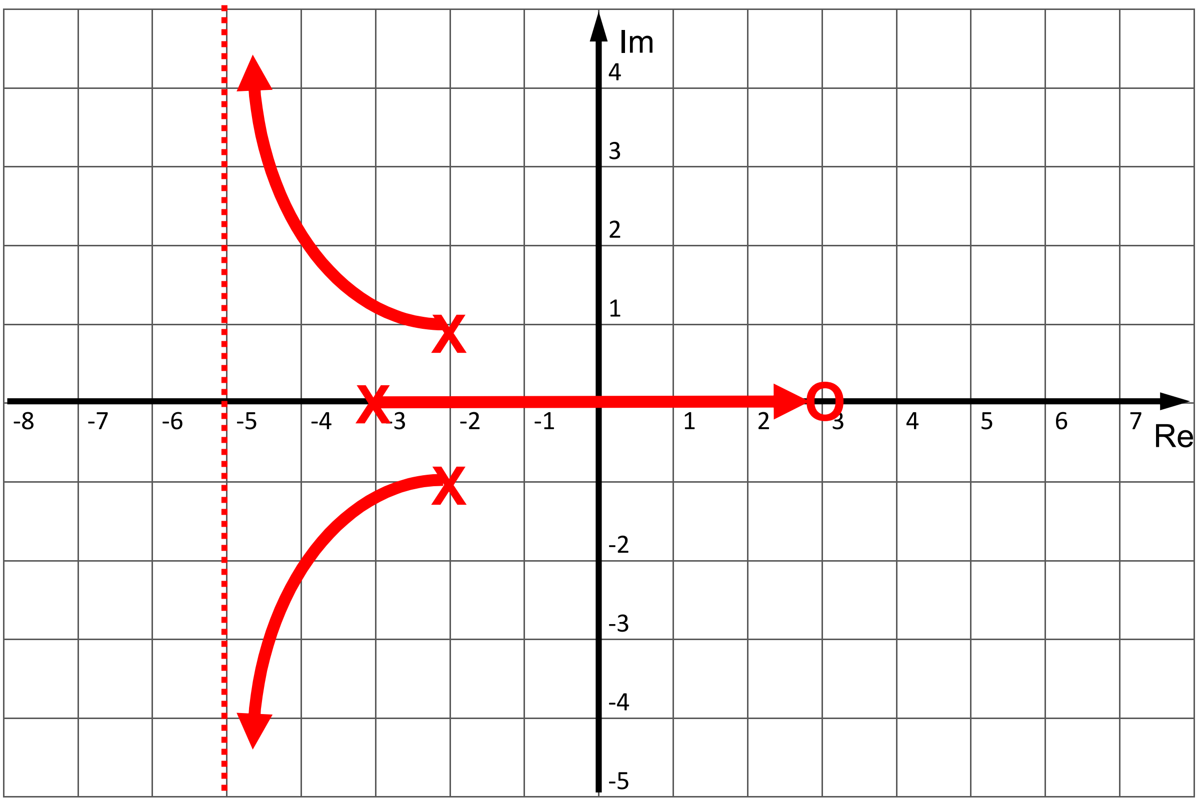


si disegni il corrispondente luogo delle radici valido per $K > 0$ (luogo diretto).

RISPOSTA:

NOTA: la funzione di trasferimento di anello ha uno zero ($n_z = 1$) in $+3$ e tre poli ($n_p = 3$) rispettivamente in -3, $-2+i$ e $-2-i$ pertanto il luogo ha due asintoti (numero asintoti = $n_p - n_z = 2$), disposti con angoli di $\pi/3$ e $3/2\pi$ rispetto all'asse reale. Il centro degli asintoti è il punto sull'asse reale con coordinata:

$$\sigma_{asintoti} = \frac{1}{n_p - n_z}\left(\sum_{i=1}^{n_p} p_i - \sum_{i=1}^{n_z} z_i\right) = -5$$



ESERCIZIO 5.

Dato il sistema dal diagramma a blocchi dell'Esercizio 4, si determini il valore di $K > 0$ per cui il sistema risulti semplicemente stabile. Si specifichi inoltre se per tale valore di K il sistema risulti avere un polo nullo oppure una coppia di poli puramente immaginari (senza necessariamente calcolarli).

RISPOSTA:

Il luogo delle radici disegnato in risposta all'Esercizio 4 dimostra in effetti che superando un determinato valore di K il sistema in retroazione diventa instabile. Il valore limite di K che corrisponde alla condizione in cui il sistema è semplicemente stabile (o marginalmente stabile) si determina applicando il criterio di Routh al polinomio a denominatore della funzione di trasferimento ad anello chiuso:

$$D_{cl}(s) = s^3 + 7s^2 + (17 + K)s + 15 - 3K$$

si verifica che i due estremi dell'intervallo di valori di K per cui il sistema in retroazione risulta stabile sono -10,4 e 5. Quest'ultimo valore, essendo il primo escluso dal vincolo del testo, determina la prima parte della risposta, cioè:

$$K = 5$$

Sostituendo tale valore, si può facilmente verificare che:

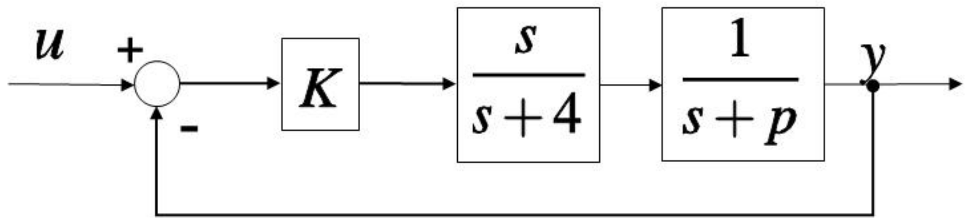
$$D_{cl}(s) = s(s^3 + 8s^2 + 23)$$

cioè che il sistema in retroazione ha un polo nullo.

$\boxed{X}$ **POLO NULLO** $\boxed{}$ **POLI PURAMENTE IMMAGINARI**

ESERCIZIO 6.

Dato il sistema descritto dal seguente diagramma a blocchi:



si determinino i valori di K e p tali che il sistema ad anello chiuso risulti avere pulsazione naturale $\omega_n = 4$ e tempo di assestamento $T_a = 1$ secondo.

RISPOSTA:

Il denominatore del sistema ad anello chiuso risulta $= s^2 + (K + p + 4)\, s + 4\, p$.

Confrontando tale polinomio con il denominatore tipico dei sistemi del secondo ordine $s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2$, si può notare che il coefficiente del terzo termine corrisponde a $\omega_n^2 = 4\, p = 16$, da cui si ricava immediatamente $p = 4$.

Il tempo di assestamento di un sistema del secondo ordine è noto essere: $T_a = 3 / \delta \omega_n$, pertanto ipotizzando che la specifica su ω_n sia rispettata, si ottiene che deve essere $\delta = 3/4$. Dati quindi i valori di p e δ e confrontando il coefficiente del secondo termine tipico con quello ottenuto in funzione di di K e p, si ottiene $K = -2$, pertanto il risultato finale è

$$K = -2 \qquad\qquad p = 4$$

TEST A RISPOSTA MULTIPLA

DOMANDA 1.
Il moto libero di un sistema dinamico, lineare, stazionario, continuo e di ordine due, è del tipo:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^t x_1(0) \\ x_2(t) &= e^{-2t} x_2(0) \end{aligned}$$

Il sistema considerato:

O è completamente controllabile
X può essere completamente controllabile
O è asintoticamente stabile
O è semplicemente stabile.

DOMANDA 2.
Il sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -2x(t) + u(t) \\ y(t) &= 2x(t) \end{aligned}$$

ha funzione di risposta impulsiva pari a:

O $W(t) = e^{-2t}$

X $W(t) = 2e^{-2t}$

O $W(t) = e^{2t}$

O $W(t) = 2e^{2t}$

DOMANDA 3.
La retroazione tra stato stimato (mediante osservatore identità) e ingresso in un sistema dinamico, lineare e stazionario, consente di assegnare arbitrariamente gli autovalori del sistema chiuso in retroazione se il sistema osservato è:

O completamente controllabile
O completamente osservabile
X completamente osservabile e completamente controllabile
O asintoticamente stabile

DOMANDA 4.
Un sistema dinamico lineare e stazionario caratterizzato dalla seguente matrice di transizione:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & e^{-2t} \\ 0 & 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

O è completamente controllabile
O ha modi instabili
X ha un modo semplicemente stabile
X ha un modo asintoticamente stabile

DOMANDA 5.
L'errore a regime del sistema :

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

chiuso in retroazione unitaria negativa, quando in ingresso è presente un gradino unitario:

$$u(s) = \frac{1}{s}$$

è pari a:

x $e(\infty) = 0$

o $e(\infty) = 0{,}1$

o $e(\infty) = 1$

o $e(\infty) = 10$

DOMANDA 6.
Una rete correttrice ad ritardo e anticipo

$$G(s) = \frac{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{(1+\alpha\tau_1 s)(1+\frac{\tau_2}{\alpha} s)}$$

caratterizzata dalla pulsazione centrale $\omega_n = 1/\sqrt{\tau_1\tau_2}$

X Attenua l'ampiezza per $\omega \in]0, \infty[$

O Amplifica l'ampiezza per $\omega \in]0, \infty[$

X Attenua e introduce un ritardo di fase per $\omega \in]0, \omega_n[$

O Amplifica e introduce un anticipo di fase per $\omega \in]0, \omega_n[$

DOMANDA 7.
La risposta frequenziale di un sistema dinamico lineare e stazionario SISO, caratterizzato da una funzione di trasferimento $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa:

X si può ottenere da $G(s)$ ponendo $s = j\,\omega$
O consente di calcolare la risposta libera del sistema
O consente di determinare la matrice di transizione dello stato del sistema
X consente di calcolare, a regime, il valore dell'uscita sinusoidale del sistema, quando all'ingresso è applicato un ingresso sinusoidale

DOMANDA 8.
Il regolatore standard di tipo PID, nella forma ideale:

$$C(s) = K_p\left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s}\right)$$

O è un sistema fisicamente realizzabile
X non è un sistema fisicamente realizzabile
X è caratterizzato da una coppia di zeri reali se $T_i \geq 4\,T_d$
O è caratterizzato da una coppia di poli reali se $T_i \geq 4\,T_d$