



# Fondamenti di Automatica

## Analisi armonica e metodi grafici

Prof. Marcello Bonfè

Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara

Tel. +39 0532 974839

E-mail: marcello.bonfe@unife.it



Università degli Studi di Ferrara

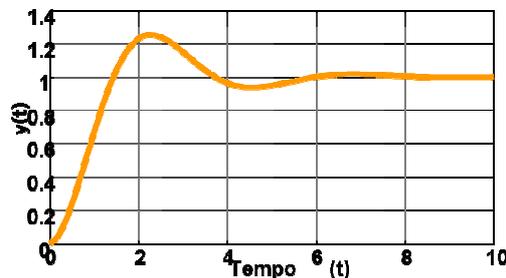


## Analisi armonica e metodi grafici RISPOSTA ARMONICA



## Analisi armonica e motivazioni

- ➔ L'**analisi armonica** si contrappone alle analisi nel **dominio del tempo** viste finora:



- ➔ Tramite l'analisi armonica infatti, si considerano le proprietà dei sistemi dinamici osservabili da risposte in regime sinusoidale, caratterizzate dalla frequenza (analisi nel **dominio della frequenza**)

slide 3

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Analisi armonica e motivazioni - 1

- ➔ L'**analisi armonica** si basa sul modello matematico (per sistemi LTI) fornito dalle funzioni di trasferimento  **$G(s)$**
- ➔ Il modello matematico  **$G(s)$**  è equivalente ai modelli basati su equazioni differenziali:
  - per condizioni iniziali nulle (sistemi **in quiete**)
  - per il comportamento **ingresso-uscita**
- ➔ Tuttavia, il modello utilizzato per l'analisi armonica ha il notevole vantaggio di essere più facilmente **identificabile sperimentale**

slide 4

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Risposta armonica

- ➔ Si consideri un sistema LTI con  $Y(s) = G(s)U(s)$  e con **tutti i poli a parte reale negativa**

- ➔ Si applichi ingresso al sistema un ingresso sinusoidale:

$$u(t) = X \sin(\omega t) \Rightarrow U(s) = \frac{X\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- ➔ L'uscita ottenuta è una funzione:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{X\omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}G(s)$$

i cui poli sono quelli di  $G(s)$  più quelli imposti dall'ingresso sinusoidale

slide 5

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Risposta armonica - 1

- ➔ **Antitrasformando** si ha quindi:

$$y(t) = y_0(t) + k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t}$$

nella quale  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_0(t) = 0$  e i residui  $k_1$  e  $k_2$ :

$$k_1 = \left[ G(s) \frac{X\omega}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega)$$

$$k_2 = \left[ G(s) \frac{X\omega}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega} = \frac{X}{-2j} G(-j\omega)$$

slide 6

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Risposta armonica - 2

► Ponendo:  $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ ;  $G(-j\omega) = |G(j\omega)|e^{-j\varphi(\omega)}$   
con  $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$

► Risulta quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) &= |G(j\omega)| X \frac{e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} - e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))}}{2j} \\ &= |G(j\omega)| X \sin(\omega t + \varphi(\omega))\end{aligned}$$

slide 7

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Risposta armonica - 2a

► In altre parole, l'uscita del sistema (LTI con FdT avente poli a parte reale negativa) in risposta ad ingresso sinusoidale è (a regime) una sinusoide

$$y(\infty) = \underbrace{|G(j\omega)| X}_{\text{ampiezza}} \sin(\omega t + \underbrace{\varphi(\omega)}_{\text{fase}})$$

con:

- **stessa pulsazione  $\omega$**  di quella in ingresso
- **ampiezza**  $Y(\omega) = |G(j\omega)| X$
- **fase**  $\varphi(\omega) = \arg[G(j\omega)]$

slide 8

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)

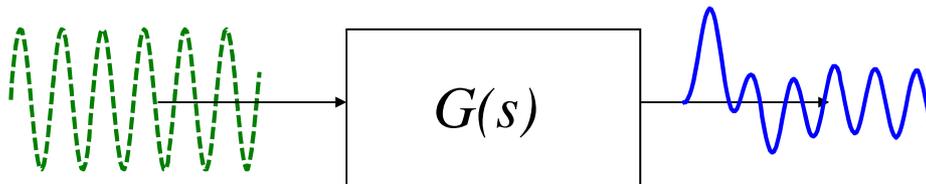


## Risposta armonica - 3

- Si ha pertanto che l'ampiezza e lo sfasamento della risposta, rispetto all'ingresso sono funzioni della pulsazione  $\omega$  :

$$u(t) = X \text{sen}(\omega t)$$

$$y(t) \rightarrow Y(\omega) \text{sen}(\omega t + \varphi(\omega))$$



slide 9

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)

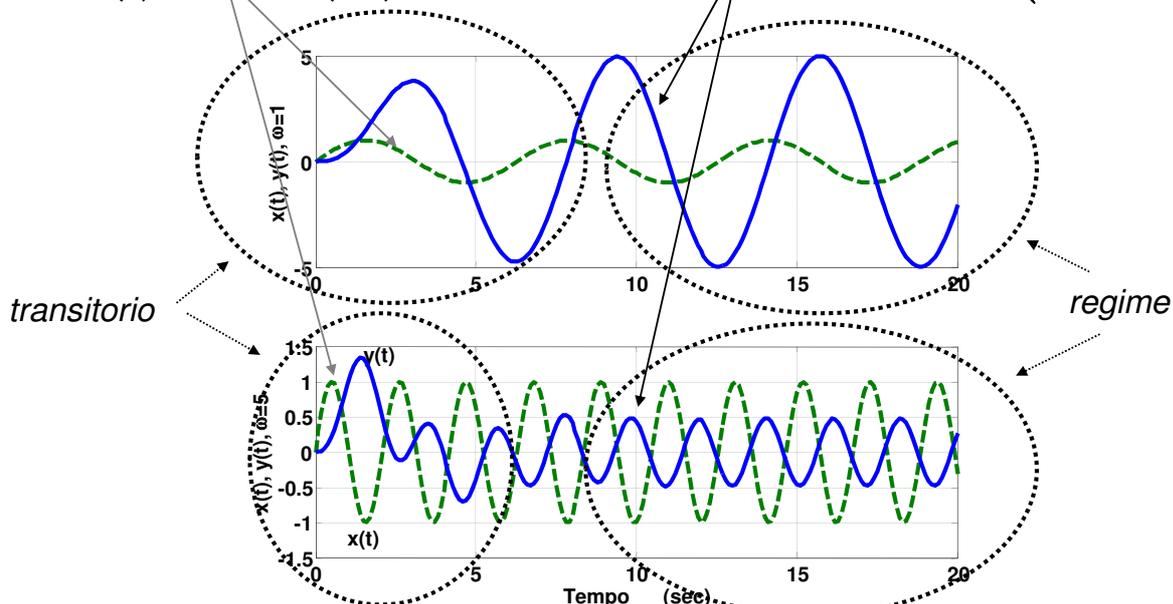


## Risposta armonica - 4

- Il regime sinusoidale puro si ottiene una volta terminato il transitorio dipendente dai poli di  $\mathbf{G}(s)$ :

$$u(t) = X \text{sen}(\omega t)$$

$$y(t) = Y(\omega) \text{sen}(\omega t + \varphi(\omega))$$



slide 10

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Risposta armonica - 4a

- **N.B.:** Nel caso in cui la funzione di trasferimento abbia una coppia di **zeri** puramente immaginari in  $\pm j\omega$ , allora la risposta del sistema a regime sarà **identicamente nulla**
- In generale, agli zeri  $z_i$  della funzione di trasferimento corrispondono dei segnali di ingresso la cui trasformata di Laplace sia:

$$U(s) = \frac{X}{s - z_i}$$

per i quali la risposta forzata è nulla, situazione che evidenzia la **proprietà bloccante degli zeri**

## Risposta armonica - 5

- Si definisce **funzione di risposta armonica** la funzione di variabile reale a valori complessi:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} (\cos \varphi(\omega) + j \operatorname{sen} \varphi(\omega))$$

$$F(\omega) \Rightarrow \begin{cases} \text{modulo: rapporto } Y(\omega)/X \\ \text{argomento: angolo } \varphi(\omega) \end{cases}$$

- Essa descrive completamente il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie pulsazioni (o frequenze  $f = \omega/(2\pi)$ ):  $0 \leq \omega < \infty$

## Risposta armonica - 6

- La **funzione di risposta armonica** è legata alla **funzione di trasferimento**:

$$F(\omega) = G(s) \Big|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

- Pertanto, dalla conoscenza della **G(s)** si può calcolare analiticamente l'espressione della **risposta** (sinusoidale.. a regime!) del sistema, quando all'**ingresso** è applicato un segnale **sinusoidale**

slide 13

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Risposta armonica: esempio di calcolo dell'uscita

- Si consideri:  $G(s) = \frac{2}{s+2}$

alla quale è applicato l'ingresso:  $u(t) = \sin(2t)$

La pulsazione di interesse è quindi  $\omega = 2$

La f. di risposta armonica è  $G(j\omega) = \frac{2}{2+j\omega}$

Il cui modulo e argomento per  $\omega = 2$  sono:

$$|G(j2)| = \frac{2}{\sqrt{4+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\arg[G(j2)] = \arg 2 - \arg(2+j2) = 0 - \arctan \frac{2}{2} = -\frac{\pi}{4}$$

slide 14

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



# Risposta armonica: esempio di calcolo dell'uscita

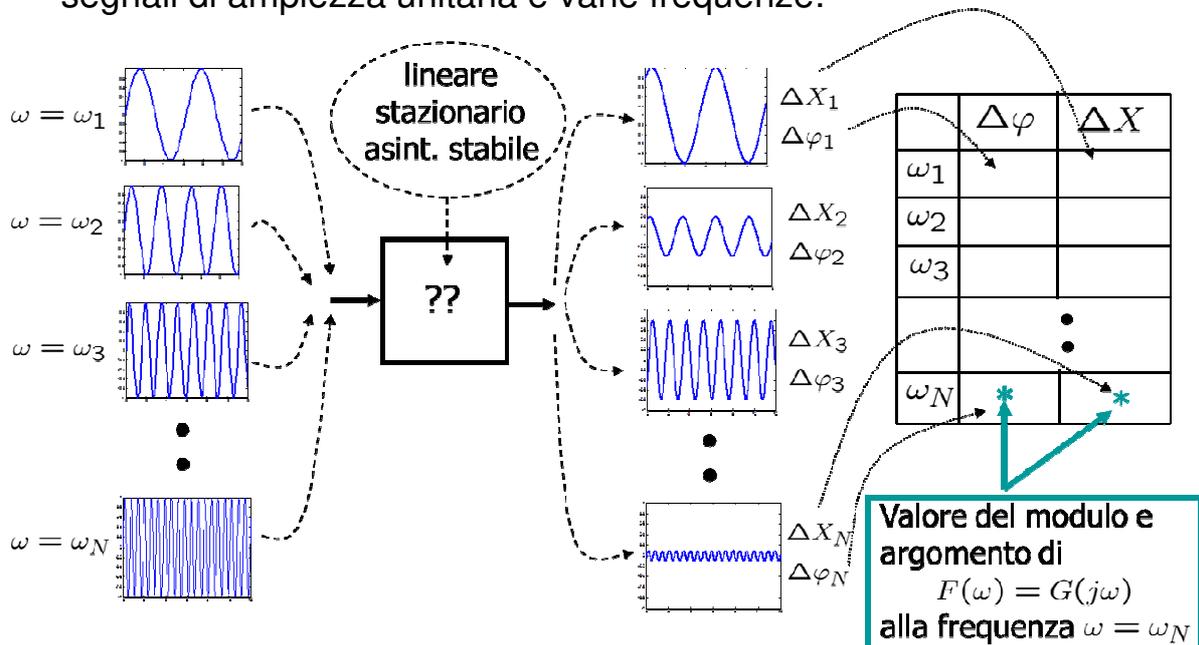
► Pertanto, a regime (i.e. per  $t \rightarrow \infty$ ):

$$y(t) = |G(j2)| \text{sen} \left( 2t + \arg[G(j2)] \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen} \left( 2t - \frac{\pi}{4} \right)$$

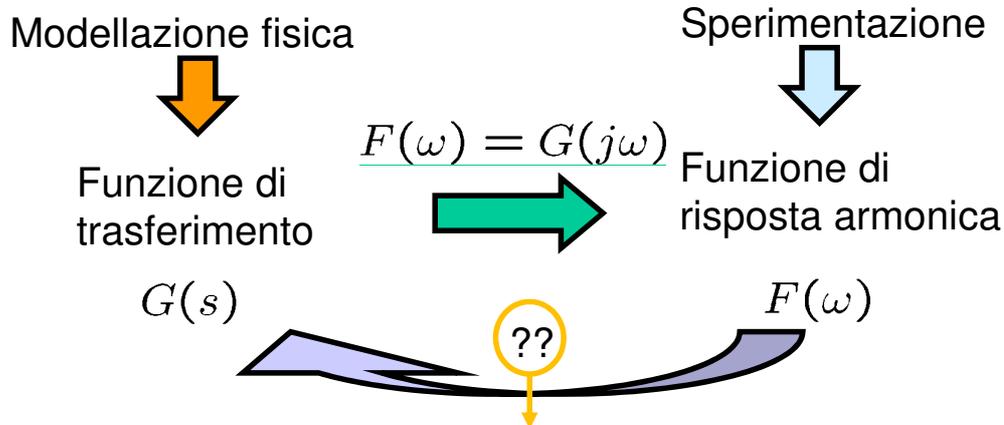
# Risposta armonica - 7

► La **risposta armonica  $F(\omega)$**  può essere determinata sperimentalmente tramite test del sistema "ignoto" (i.e. black-box) con segnali di ampiezza unitaria e varie frequenze:



## Risposta armonica - 8

- Si hanno quindi i seguenti possibili procedimenti per ottenere il modello della funzione di trasferimento:



Si possono applicare i metodi grafici per la rappresentazione della risposta armonica mostrati nel seguito (i.e. **diagrammi di Bode**) dai quali determinare poi la relazione con poli/zeri di **G(s)**

## Analisi armonica e metodi grafici DIAGRAMMI DI BODE

# Diagrammi di Bode

- ▶ Sono rappresentazioni grafiche della risposta armonica, che si considera da qui in poi:  $G(j\omega)$
- ▶ Poiché  $G(j\omega)$  è funzione del numero reale  $\omega$ , ma ha valori complessi, si usano due differenti grafici:
  - Il **diagramma della ampiezze** (o moduli)  $|G(j\omega)|$
  - Il **diagramma delle fasi**  $\arg[G(j\omega)]$
- ▶ Il diagramma delle ampiezze è di tipo logaritmico:
  - ascissa:  $\log(\omega)$ , ordinata:  $\log(|G(j\omega)|)$
- ▶ Il diagramma delle fasi è semilogaritmico:
  - ascissa:  $\log(\omega)$ , ordinata:  $\arg[G(j\omega)]$

slide 19

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)

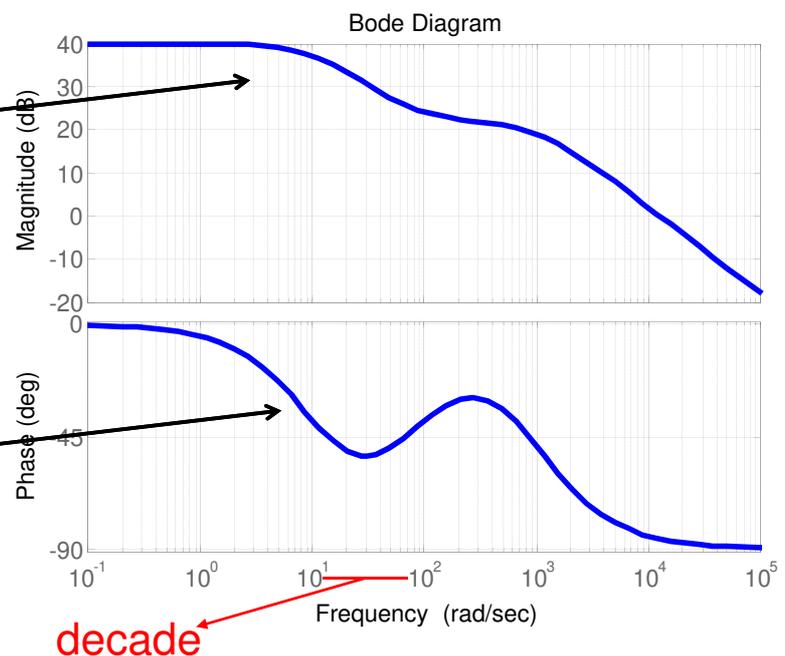


# Diagrammi di Bode - 1

$$G(j\omega) = F(\omega) = |G(j\omega)|e^{j\arg(G(j\omega))}$$

$|G(j\omega)|$   
**Diagramma delle ampiezze**

$\arg(G(j\omega))$   
**Diagramma delle fasi**



slide 20

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode - 2

- ➔ Spesso si usa come unità di misura per il diagramma delle ampiezze il dB (decibel), cioè si pone sull'asse delle ordinate:  $20\log(|G(j\omega)|)$ 
  - Se  $|G(j\omega)| = 2 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 6$
  - Se  $|G(j\omega)| = 10 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 20$
  - Se  $|G(j\omega)| = 100 \Rightarrow |G(j\omega)|_{dB} = 40$
- ➔ I diagrammi logaritmici:
  - consentono di rappresentare intervalli molto ampi
  - consentono di rappresentare il prodotto di funzioni di risposta armonica sommandone i diagrammi

slide 21

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari

- ➔ Per la costruzione dei diagrammi di Bode a partire di  $G(s)$ , risulta agevole la seguente fattorizzazione:
  - Forma con *costanti di tempo, pulsazioni naturali e coefficienti di smorzamento*

$$G(s) = K \frac{(1 + \tau_{z1}s)^{m_1} (1 + \tau_{z2}s)^{m_2} \dots \left(1 + 2\delta_i \frac{s}{\omega_{ni}} + \frac{s^2}{\omega_{ni}^2}\right)^{m_i} \dots}{(1 + \tau_{p1}s)^{n_1} (1 + \tau_{p2}s)^{n_2} \dots \left(1 + 2\delta_j \frac{s}{\omega_{nj}} + \frac{s^2}{\omega_{nj}^2}\right)^{n_j} \dots}$$

**N.B.:** In questa forma  $K$  viene detto *guadagno statico* (in generale, guadagno statico =  $G(0)$ )

slide 22

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari

- Forma alternativa alla precedente (ma meno pratica per il disegno manuale dei diagrammi di Bode), detta forma **guadagno-zeri-poli**:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \\ &= K_1 \frac{(s-z_1)^{m_1} (s-z_2)^{m_2} \dots (s-z_l)^{m_l}}{(s-p_1)^{n_1} (s-p_2)^{n_2} \dots (s-p_h)^{n_h}} \quad (\text{con } K_1 = b_m) \end{aligned}$$

In tale forma  $K_1$  viene anche detto *guadagno ad alta frequenza*

**N.B.** relazione tra le due forme:  $K = K_1 \frac{\tau_{p_1}^{n_1} \tau_{p_2}^{n_2} \dots \omega_{n_j}^{2n_j} \dots}{\tau_{z_1}^{m_1} \tau_{z_2}^{m_2} \dots \omega_{n_i}^{2m_i} \dots}$

## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 1

- Funzioni elementari che compongono  $G(s)$ :

- $K \leq 0$  (costante di guadagno)
- $s^{\pm 1}$  (polo o zero nell'origine)
- $(1 + \tau s)^{\pm 1}$
- $\left(1 + 2\delta \frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}$

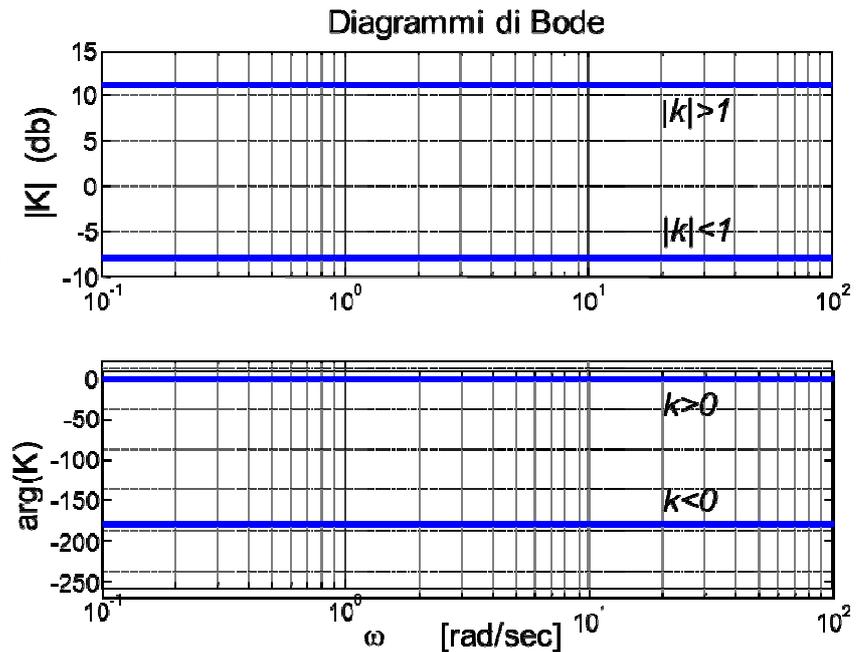
che verranno analizzate ponendo:  $s = j\omega$

- **N.B.:** Se la FdT non ha poli o zeri nell'origine,  $K$  è il guadagno con cui vengono trasmessi ingressi a  $\omega = 0$ . Tali segnali, di fatto costanti per  $t > 0$ , si dicono **componenti continue (o statiche)** e  $K$  è appunto il **guadagno statico**

## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 2

### ► Costante K:

- se positiva, la fase è = 0,
- se negativa, la fase è convenzionalmente posta =  $-\pi$



slide 25

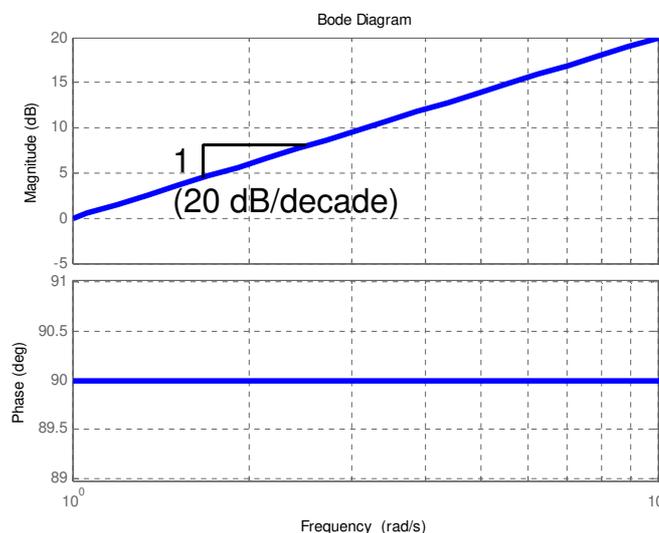
Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 3

### ► Termine $G(j\omega) = j\omega$ (i.e. FdT $G(s) = s$ ):

- guadagno statico  $\rightarrow 0$ , modulo = 1 (0 dB!) a  $\omega = 1$
- fase =  $\pi/2$



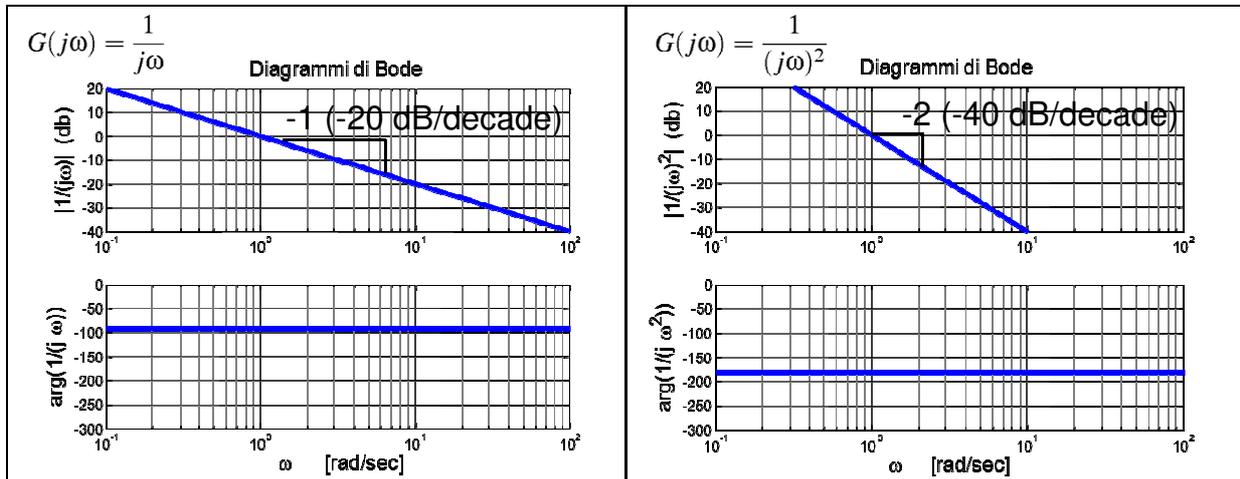
slide 26

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 4

- Termine  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h}$  (i.e. FdT  $G(s) = 1/s^h$ ):
  - guadagno statico  $\rightarrow \infty$ , modulo = 1 (0 dB!) a  $\omega = 1$
  - fase =  $-h \frac{\pi}{2}$



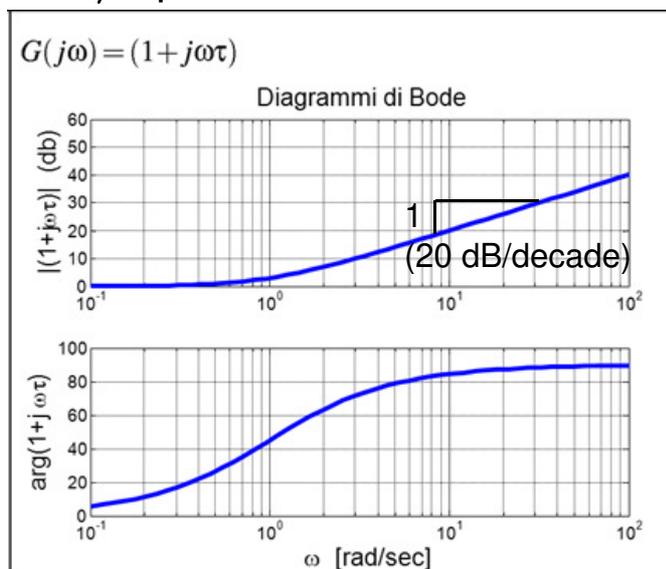
slide 27

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 5

- Termine  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$ , con  $\tau > 0$  :
  - guadagno  $\sqrt{2} = 3$  dB a  $\omega = 1/\tau$  ( $|G(j\omega)| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$ )
  - fase =  $\pi/4$  a  $\omega = 1/\tau$  ( $\arg[G(j\omega)] = \arctan(\omega\tau)$ )
  - fase  $\rightarrow \pi/2$  per  $\omega \rightarrow \infty$



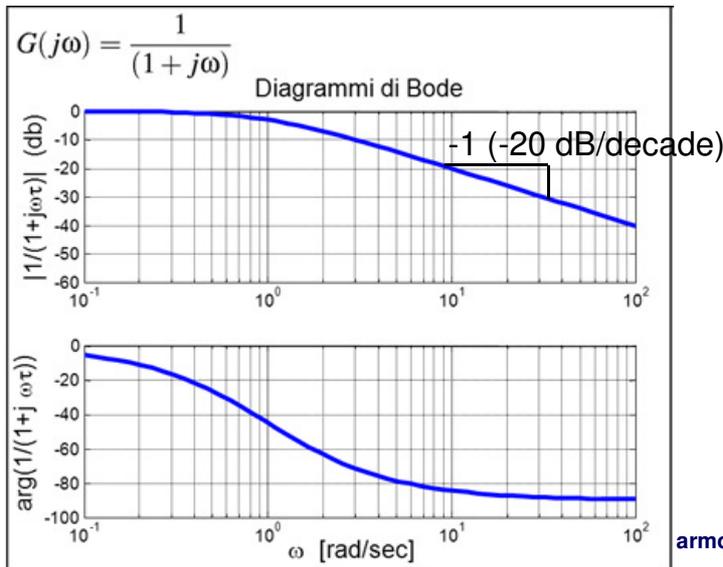
slide 28

armonica (Bode, Nyquist)



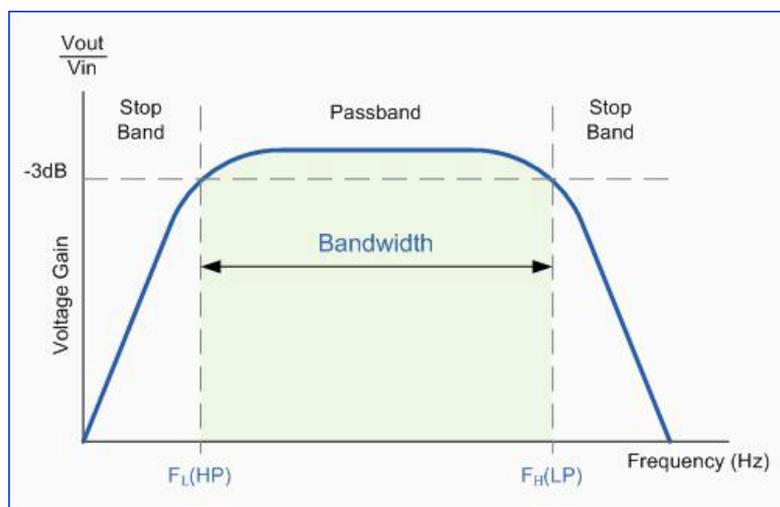
## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 5a

- ➔ Termine  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1}$ , con  $\tau > 0$ :
  - guadagno  $(\sqrt{2})^{-1} = -3$  dB a  $\omega = 1/\tau$  ( $|G(j\omega)| = (\sqrt{1 + \omega^2\tau^2})^{-1}$ )
  - fase =  $-\pi/4$  a  $\omega = 1/\tau$  ( $\arg[G(j\omega)] = -\arctan(\omega\tau)$ )
  - fase  $\rightarrow -\pi/2$  per  $\omega \rightarrow \infty$



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 5b

- ➔ **NOTA:** il fatto che il guadagno sia  $(\sqrt{2})^{-1}$ , cioè -3 dB, per  $\omega = 1/\tau$  definisce quest'ultima come **banda passante** della risposta armonica, usando la terminologia propria del progetto di filtri per l'elaborazione analogica dei segnali



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 6

- Termine  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$ , con  $\tau < 0$  (poli/zeri POSITIVI)
  - Tali termini hanno le stesse caratteristiche di quelli nella slide precedente, per il diagramma delle ampiezze
  - Per il diagramma delle fasi, si inverte il ruolo dei poli con quello degli zeri, cioè:
    - ➔ fase  $> 0$  per i poli
    - ➔ fase  $< 0$  per gli zeri

## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 7

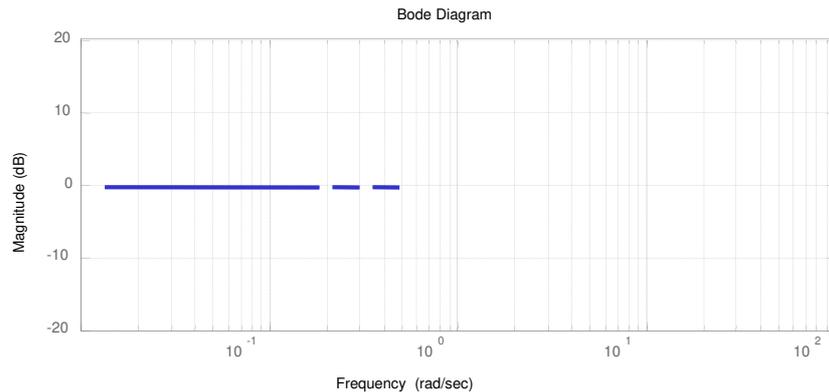
- Per semplificare il disegno si usa tracciare il diagramma di Bode in modo approssimato, ricorrendo ai **diagrammi asintotici**
- Nei diagrammi asintotici si disegnano solo linee spezzate costituite dagli **asintoti** cui tende il diagramma di Bode per  $\omega \rightarrow 0$  e per  $\omega \rightarrow \infty$
- I **punti di rottura** nel diagramma delle ampiezze corrispondono ai punti di intersezione di tali asintoti
- Inoltre, in tali punti il diagramma delle fasi approssimato (col metodo presentato nel seguito) è tangente a quello effettivo

## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 8

➔ Es.A:  $|G(j\omega)| = \left| \frac{1}{(1 + j\omega\tau)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$

$$20 \text{Log}_{10} |G(j\omega)| = -20 \text{Log}_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -20 \text{Log}_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} = 0$$



slide 33

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)

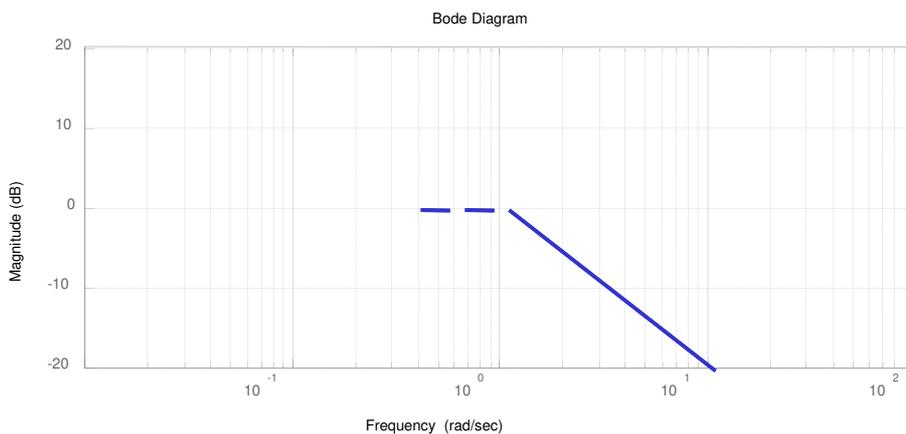


## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 9

➔ Es.A (cont.):  $\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow -20 \text{Log}_{10} \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \approx -20 \text{Log}_{10} (\omega\tau)$

$$-20 \text{Log}_{10} (\omega\tau) = 20 \text{Log}_{10} \frac{1}{\tau} - 20 \text{Log}_{10} \omega$$

retta passante per  $20 \text{Log}_{10} \omega = 20 \text{Log}_{10} \frac{1}{\tau}$  con pendenza -20dB/decade



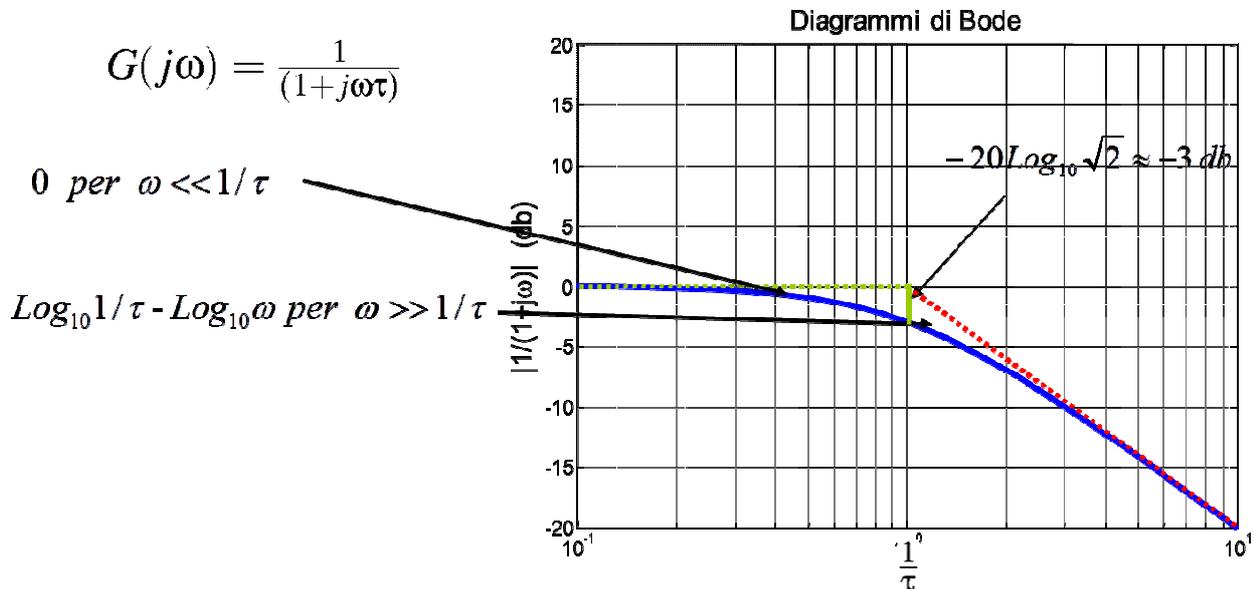
slide 34

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 10

- Es.A (cont.): l'errore di approssimazione max. è  $-20\text{Log}_{10}\sqrt{2} \approx -3\text{ db}$  per  $\omega = \frac{1}{\tau}$  (punto di rottura)



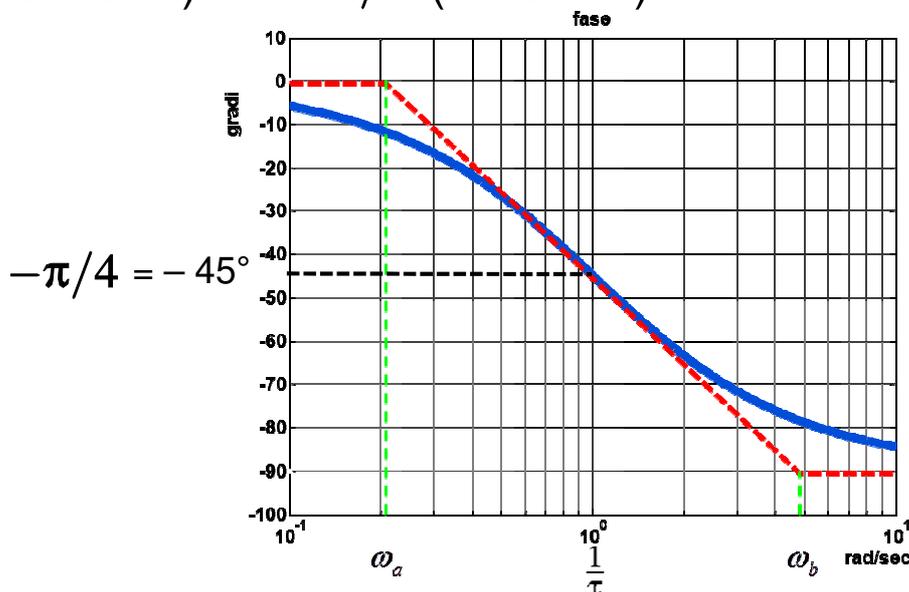
slide 35

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 11

- Es.A (cont.): la fase vale  $-\pi/4$  nel punto di rottura del diagramma delle ampiezze e tende a zero (a sinistra) e a  $-\pi/2$  (a destra)



slide 36

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 12

► Es.A (cont.): **come determinare  $\omega_a$  e  $\omega_b$  ?**

Si presentano nel seguito i valori che permettono di avere diagramma approssimato tangente a quello esatto in  $\omega=1/\tau$

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega\tau$$

$$\left. \frac{d\varphi}{d\text{Log}_{10}\omega} \right|_{\frac{1}{\tau}} = \left. \frac{d\varphi}{d\omega} \frac{d\omega}{d\text{Log}_{10}\omega} \right|_{\frac{1}{\tau}} = -\frac{\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \frac{1}{\text{Log}_{10}e} \bigg|_{\frac{1}{\tau}} = -\frac{1}{2\text{Log}_{10}e}$$

Ricordando: 
$$\begin{cases} \frac{d \arctan x}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \\ \omega = e^{\text{Log}_e \omega} \\ \text{Log}_e \omega = \frac{\text{Log}_{10} \omega}{\text{Log}_{10} e} \end{cases}$$

Pendenza della tangente nel punto  $\omega = 1/\tau$

slide 37

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 13

► Es.A (cont.): **come determinare  $\omega_a$  e  $\omega_b$  ?**

Per trovare i punti di intersezione tra gli asintoti della fase e la tangente nel punto  $\omega = 1/\tau$  :

$$\frac{\pi/4}{\text{Log}_{10} \frac{1}{\tau} - \text{Log}_{10} \omega_a} = \frac{\pi/4}{\text{Log}_{10} \omega_b - \text{Log}_{10} \frac{1}{\tau}} = \frac{1}{2\text{Log}_{10}e} \Rightarrow \text{Log}_{10} \frac{1/\tau}{\omega_a} = \text{Log}_{10} \frac{\omega_b}{1/\tau} = \frac{\pi}{2} \text{Log}_{10}e$$

$$\frac{1/\tau}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{1/\tau} = \text{Log}_{10} \left( \frac{\pi}{2} \text{Log}_{10}e \right) = 4.81$$

$$\omega_a = \frac{1/\tau}{4.81}$$

$$\omega_b = 4.81 \cdot 1/\tau$$

slide 38

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 13a

► Es.A (cont.): come determinare  $\omega_a$  e  $\omega_b$  ?

**NOTA:** il valore 4.81 appena trovato permette appunto di disegnare un diagramma approssimato della fase che interseca quello vero in  $\omega = 1/\tau$ , avendo inoltre la stessa pendenza in tale punto.

Molti altre fonti suggeriscono di utilizzare un fattore 10, anziché 4.81, per determinare il diagramma approssimato. Tale fattore facilita il disegno manuale (basta spostarsi di una decade prima e dopo la pulsazione del polo/zero), ma NON garantisce la condizione sulla tangente...

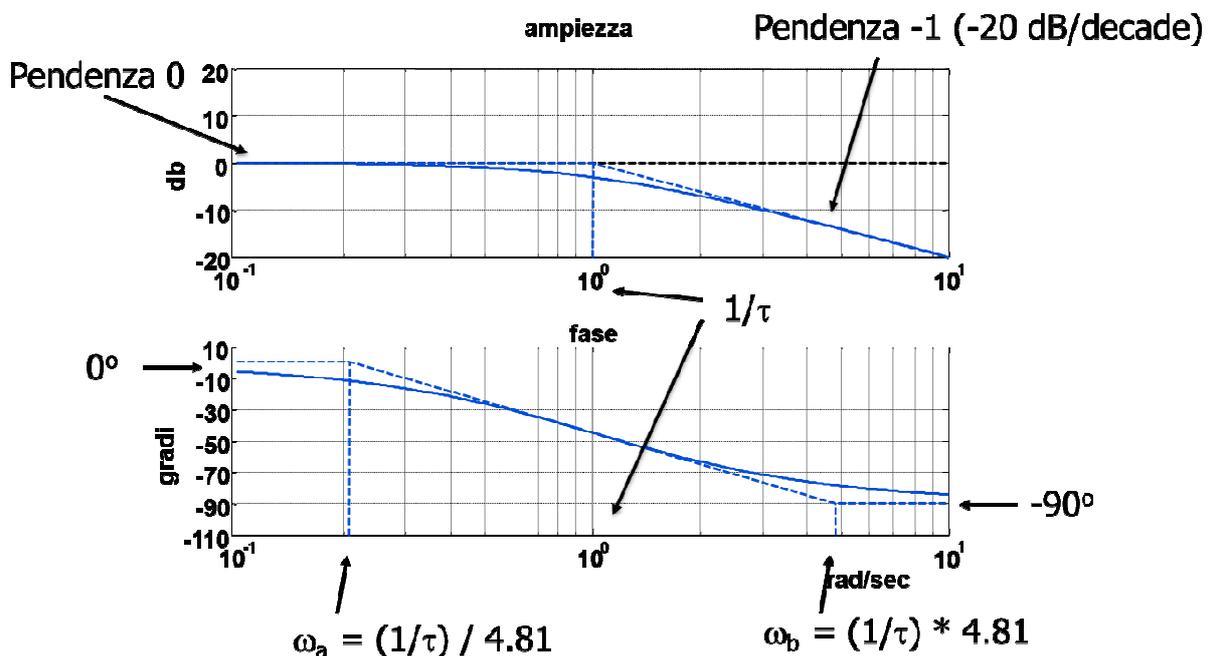
slide 39

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 14

► Es.A (cont.): diagramma di Bode completo



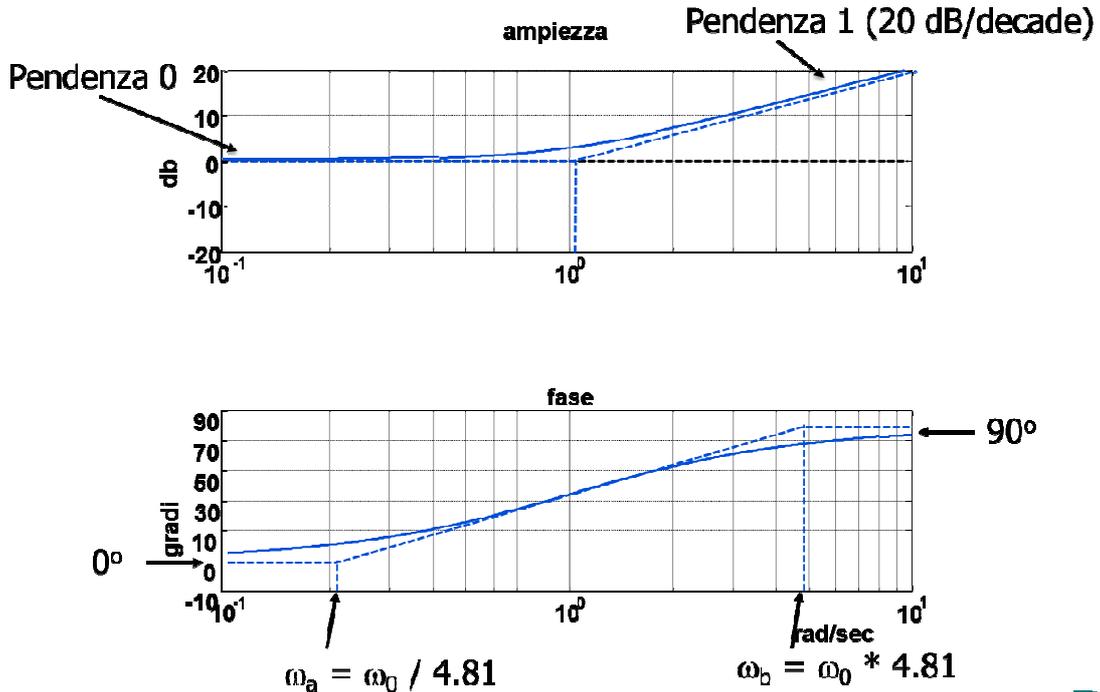
slide 40

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



# Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 15

➔ Es.A1: diagramma di Bode per  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)$



slide 41

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



# Diagramma di Bode approssimato: esempio base

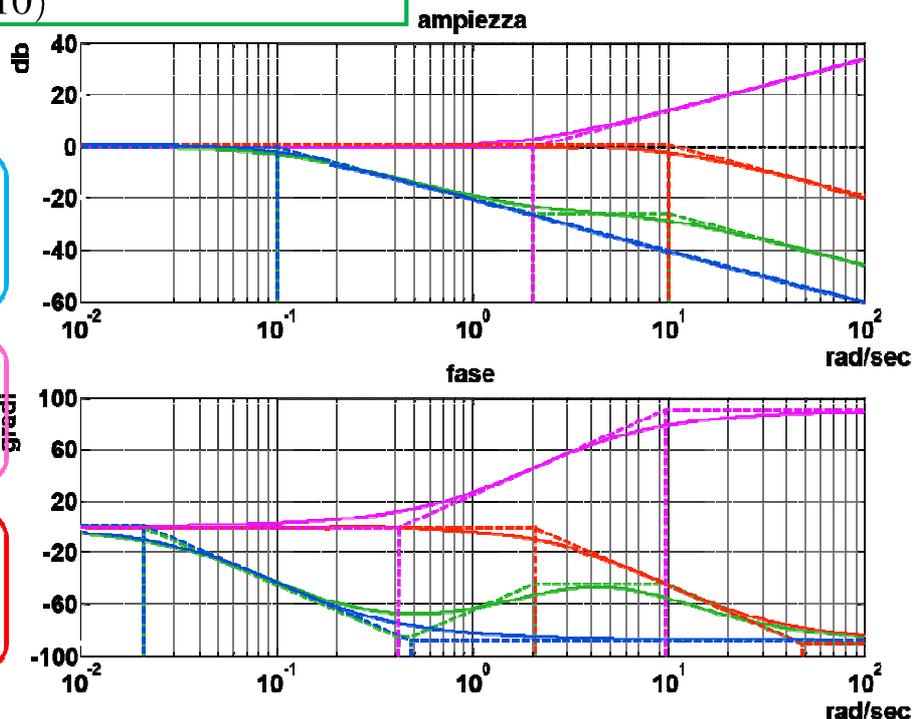
$$G(s) = \frac{0.5(s+2)}{(s+0.1)(s+10)} = kG_1(s)G_2(s)G_3(s)$$

$$k = 1$$

$$G_1(s) = \frac{1}{1+10s}$$

$$G_2(s) = 1 + 0.5s$$

$$G_3(s) = \frac{1}{1+0.1s}$$



slide 42

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 16

► Termine  $G(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{\pm 1}$ , con  $0 \leq \delta < 1$ :

– Analizzando prima il caso di esponente -1 (poli):

$$20\text{Log}_{10}|G(j\omega)| = 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\arctan \frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

slide 43

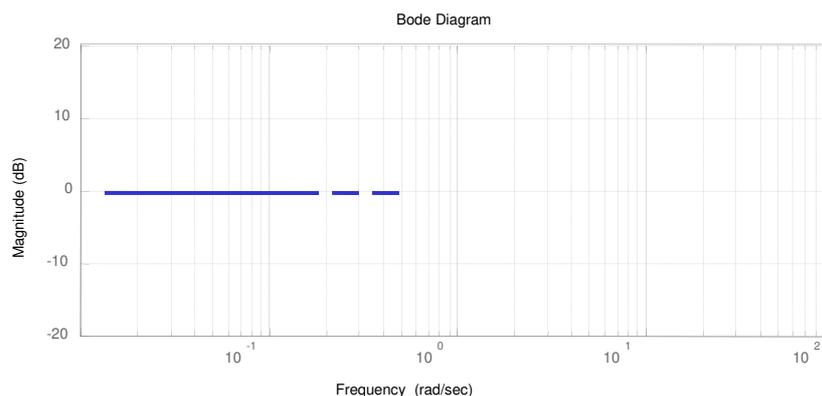
Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 17

► Es.B: diagramma di Bode approssimato per il termine del secondo ordine:

$$\text{per } \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \ll 1 \Rightarrow 20\text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \approx 0$$



Il diagramma coincide con l'asse delle ascisse

slide 44

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



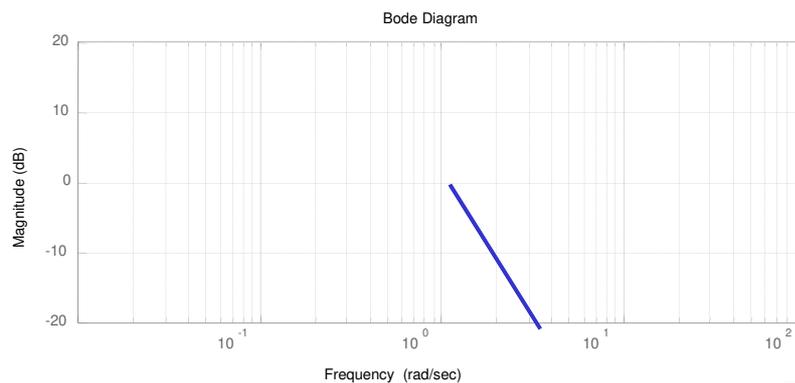
## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 18

➔ Es.B (cont.): diagramma di Bode approssimato:

$$\text{per } \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \gg 1 \Rightarrow 20 \text{Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\delta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}} \approx 20 \text{Log}_{10} \frac{1}{\left(\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)} \approx 40 \text{Log}_{10} \omega_n - 40 \text{Log}_{10} \omega$$

In questo caso il diagramma effettivo può discostarsi sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per  $\delta = 0$  e in corrispondenza della pulsazione di rottura  $\omega_n$ , lo scostamento è **infinito**

Il diagramma ha una inclinazione -40 db/decade



slide 45

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 19

➔ Es.B (cont.): il diagramma di Bode delle ampiezze ha le seguenti proprietà:

- ➔ Per  $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$  la curva presenta un massimo;
- ➔ Per  $0 \leq \delta \leq 1/2$  la curva interseca l'asse delle ascisse a destra del punto  $\omega = \omega_n$  ed è pertanto tutta al di sopra della sua approssimazione asintotica;
- ➔ Per  $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , la curva interseca l'asse delle ascisse a sinistra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
- ➔ Per  $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$  la curva non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.

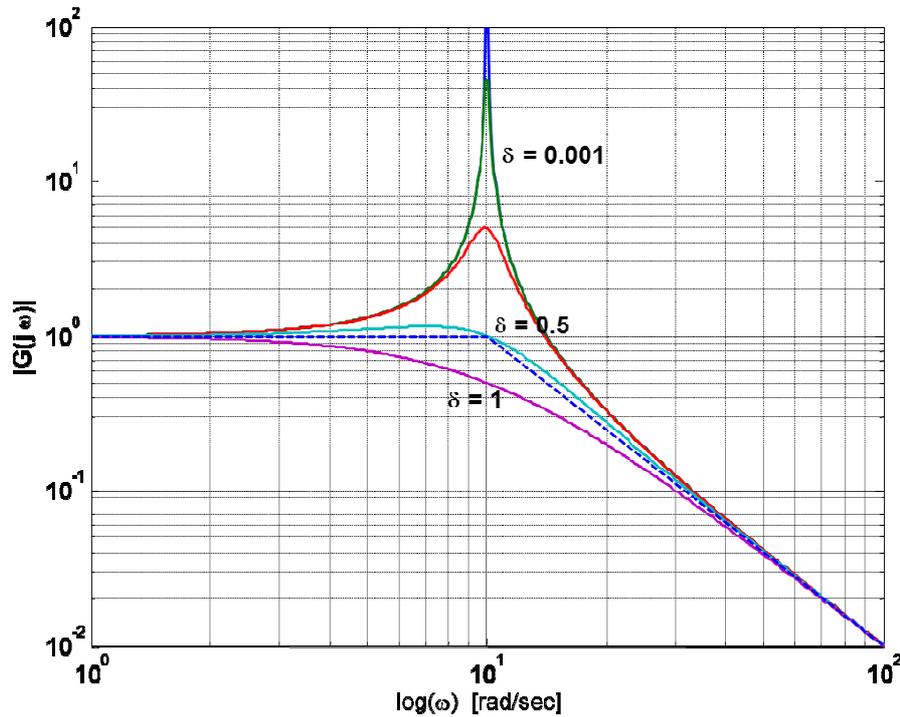
slide 46

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 20

➔ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle ampiezze:



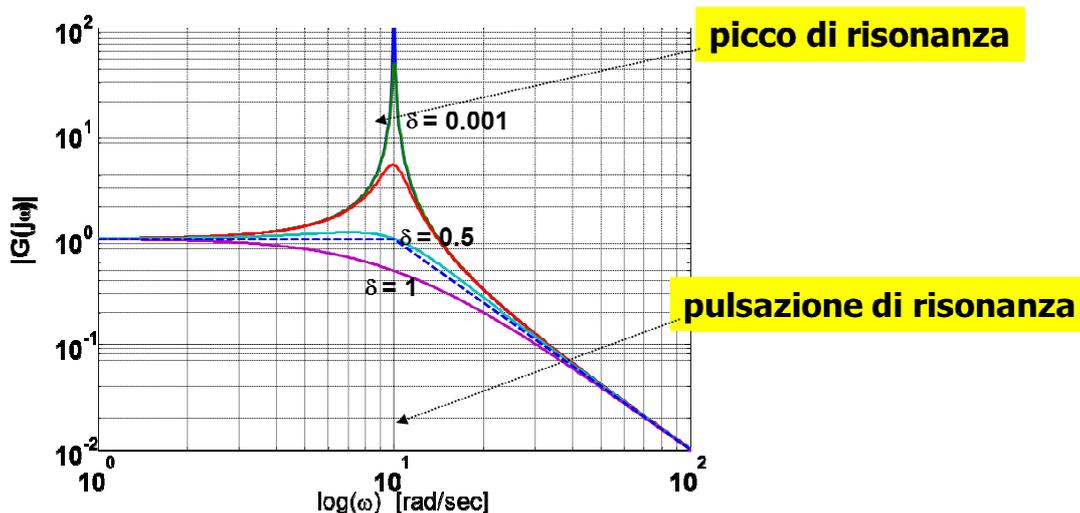
slide 47

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 21

➔ Es.B (cont.): Si definisce **picco di risonanza**  $M_R$  il valore massimo assunto dal diagramma delle ampiezze, e **pulsazione di risonanza**  $\omega_R$  la pulsazione corrispondente



slide 48

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 22

- ➔ Es.B (cont.): **calcolo di  $\omega_R$**  (ponendo  $u = \omega/\omega_n$ ):

$$20 \text{ Log}_{10} |G(j\omega)| = 20 \text{ Log}_{10} \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2}}$$

- ➔ Il valore massimo corrisponde al minimo della funzione:

$$(1-u^2)^2 + 4\delta^2 u^2 \quad (u = \omega/\omega_n)$$

- ➔ Uguagliando a zero la derivata di tale funzione:

$$-4(1-u^2)u + 8\delta^2 u = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} u = 0 & \omega = 0 \text{ (non considerata)} \\ u_R = \sqrt{1-2\delta^2} & \omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2} \\ & \text{pulsazione di risonanza} \end{cases}$$

slide 49

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



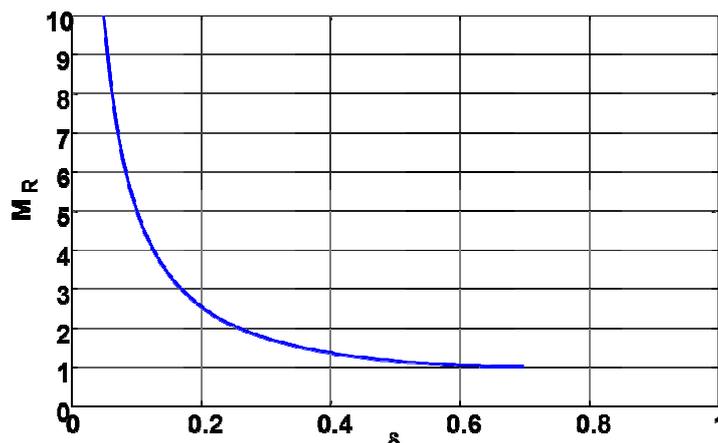
## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 23

- ➔ Es.B (cont.): **calcolo di  $\omega_R$**  (ponendo  $u = \omega/\omega_n$ ):

$$\omega_R = \omega_n \sqrt{1-2\delta^2} \quad \Rightarrow \quad 1-\delta^2 \geq 0 \rightarrow \delta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- ➔ In corrispondenza di tale pulsazione si ha quindi ampiezza:

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1-1-2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1-2\delta^2)}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$$



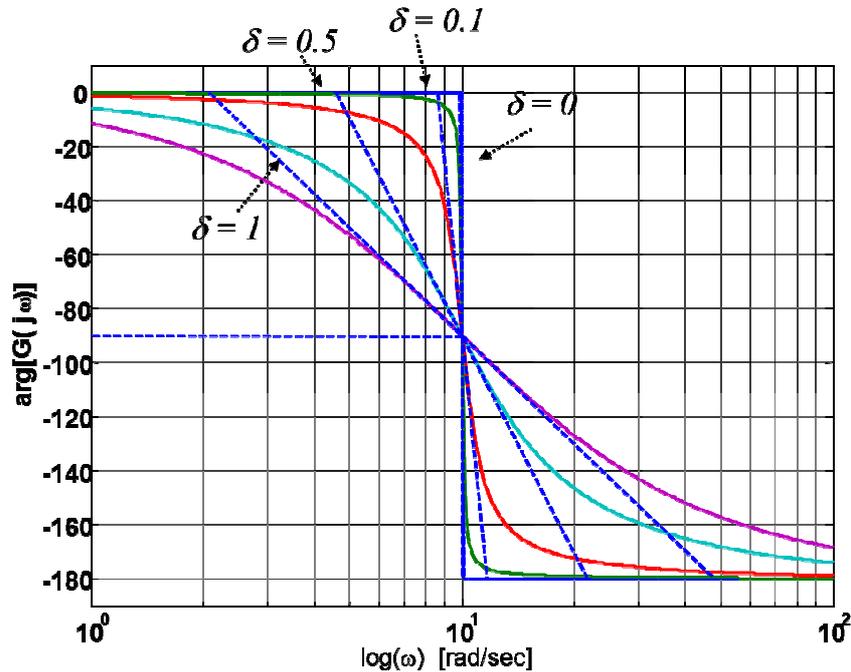
slide 50

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 24

➔ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle fasi:



slide 51

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 25

➔ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle fasi approssimato:

- asintotica tendenza a 0 e  $-180^\circ$  ( $-\pi$ )
- fase =  $-90^\circ$  ( $-\pi/2$ ) nel punto di rottura
- tangente e punti di connessione delle spezzate dipendenti da  $\delta$  :

$$\arg[G(ju)] = \varphi(u) = -\arctan \frac{2\delta u}{1-u^2}$$

$$\left. \frac{d\varphi}{d\log_{10} \omega} \right|_{\omega=\omega_n} = \left. \frac{d\varphi}{du} \frac{du}{d\log_{10} \omega} \right|_{u=1} = -\frac{1}{\delta \log_{10} e}$$

slide 52

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 26

- ➔ Es.B (cont.): diagramma di Bode delle fasi approssimato:  
 – calcolo di  $\omega_a$  e  $\omega_b$  per costruire la linea spezzata:

$$\frac{\pi/2}{\text{Log}_{10}\omega_n - \text{Log}_{10}\omega_a} = \frac{\pi/2}{\text{Log}_{10}\omega_b - \text{Log}_{10}\omega_n} = \frac{1}{\delta \text{Log}_{10}e}$$

da cui: 
$$\text{Log}_{10}\frac{\omega_n}{\omega_a} = \text{Log}_{10}\frac{\omega_b}{\omega_n} = \frac{\pi\delta \text{Log}_{10}e}{2}$$

$$\frac{\omega_n}{\omega_a} = \frac{\omega_b}{\omega_n} = 4.81^\delta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \omega_a = (4.81^\delta)^{-1} \omega_n \\ \omega_b = (4.81^\delta) \omega_n \end{cases}$$

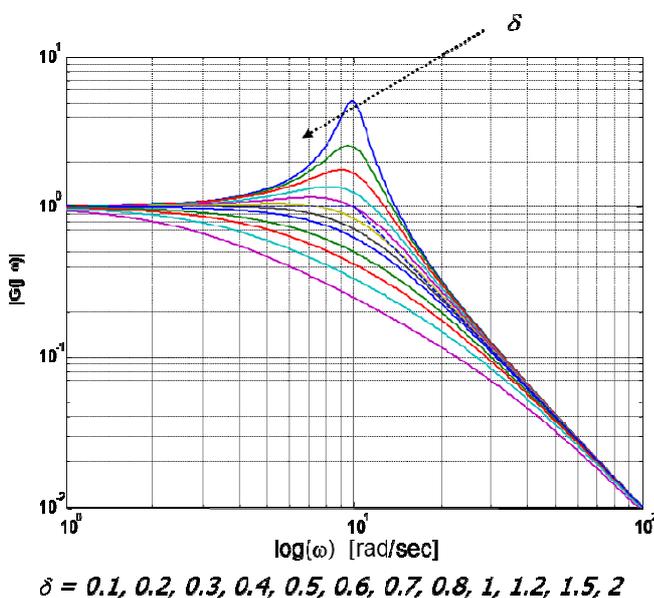
slide 53

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)

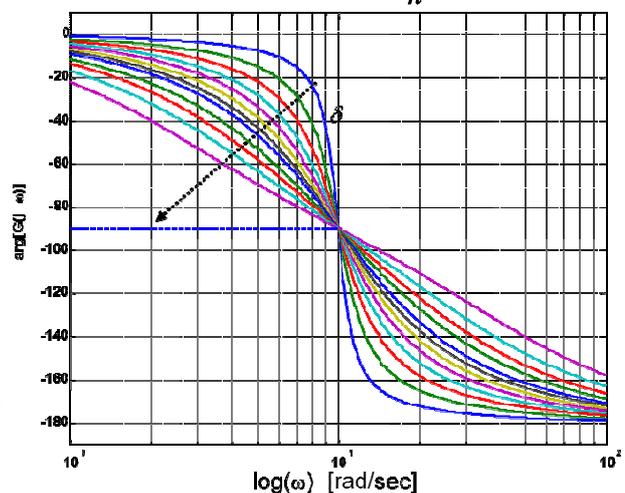


## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 27

- ➔ Es.B (cont.): **RIASSUMENDO**



$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}}$$



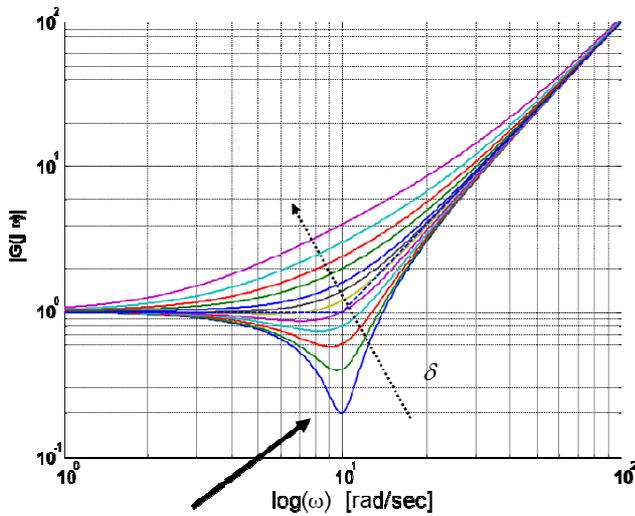
slide 54

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



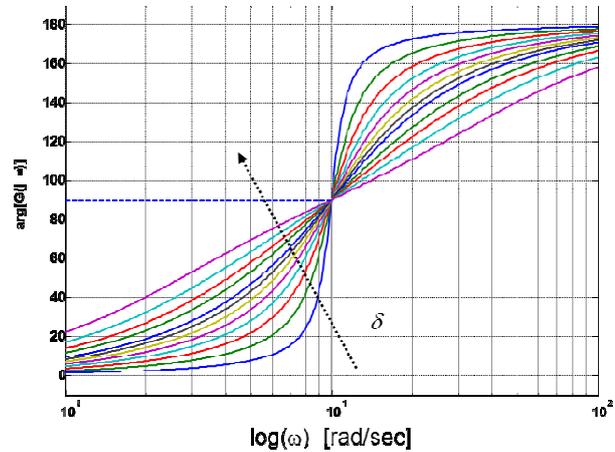
## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 28

➔ Es.B1: caso con esponente +1 (zeri)



Picco di attenuazione (antirisonanza)

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n}$$



## Diagrammi di Bode di funzioni elementari - 29

➔ **N.B.:** anche nel caso di funzioni del secondo ordine, se cambia il segno dei poli (zeri), per il diagramma delle fasi il ruolo dei termini a denominatore si inverte rispetto a quello dei termini a numeratore (non cambia il diagramma delle ampiezze)

- ➔ Ciò avviene se  $\delta < 0$  :
- poli ➔ fase positiva
  - zeri ➔ fase negativa

## Diagrammi di Bode: RIASSUMENDO

- ➔ **IPOSTESI: solo poli/zeri a parte reale negativa**
- ➔ Ogni **polo** (ogni **zero**) determina un punto di rottura in corrispondenza di una pulsazione  $\omega$  (pari a  $1/\tau$  per poli reali, a  $\omega_n$  per le coppie di poli complessi coniugati)
- ➔ Nel punto di rottura (per il diagramma approssimato):
  - La pendenza del diagramma delle ampiezze **diminuisce** (**augmenta**) di 20 dB/decade
  - La fase **diminuisce** (**augmenta**) di  $45^\circ$  ( $\pi/4$ )
- ➔ Ogni **polo** (ogni **zero**) determina asintoticamente la **diminuzione** (**aumento**) della fase di  $90^\circ$  ( $\pi/2$ )

slide 57

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: RIASSUMENDO - 1

- ➔ **NOTA:** con *ogni polo* (*ogni zero*) si intende che **poli** (**zeri**) con molteplicità  $n$ , cioè ad esempio: 
$$\frac{1}{(1 + \tau s)^n}$$

continuo come  $n$  poli con lo stesso punto di rottura e che le coppie di **poli** (**zeri**) complessi coniugati continuo per 2 (moltiplicato a sua volta per la loro molteplicità!)

- ➔ La pendenza del diagramma approssimato **diminuisce** (**augmenta**) di  $n \cdot 20$  dB/decade
- ➔ Il diagramma delle fase tende asintoticamente ad una **diminuzione** (**aumento**) della fase di  $n \cdot 90^\circ$

slide 58

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: RIASSUMENDO - 2

- ➔ Per le coppie di **poli** (**zeri**) complessi coniugati si può avere un **picco di risonanza** (**antirisonanza**)
- ➔ **Inoltre**, in caso di **poli** (**zeri**) nell'origine con molteplicità  $n$ :
  - la pendenza *iniziale* (per  $\omega \rightarrow 0$ ) deve essere pari a  $- (+) n$  su scala logaritmica [i.e.  $- (+) n \cdot 20$  dB/decade]
  - Il prolungamento del tratto iniziale deve passare per  $K$  in  $\omega = 1$
- ➔ **N.B.:** le considerazioni precedenti sulla fase si invertano in caso di poli/zeri a parte reale positiva

slide 59

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagramma di Bode: note conclusive

- ➔ Le considerazioni viste valgono sia per il **disegno manuale** dei diagrammi di Bode (approssimati) data una certa  $G(s)$ , sia per **l'elaborazione della  $G(s)$**  dati i relativi diagrammi di Bode
- ➔ Nel **primo caso**, il disegno deve procedere:
  1. identificando le pulsazioni *di rottura*
  2. se poli/zeri = 0, identificando l'intersezione tra il tratto iniziale ( $\omega \rightarrow 0$ ) a pendenza opportuna o il suo prolungamento e l'ordinata in  $\omega = 1$
  3. tracciando linee spezzate che variano opportunamente pendenza nei punti di rottura

slide 60

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagramma di Bode: note conclusive

- ➔ Nel **secondo caso**, dal disegno bisogna ricavare:
1. i coefficienti di poli/zeri dalle pulsazioni *di rottura* (**N.B.:**  $\omega = 1/\tau$  per poli/zeri reali!)
  2. la molteplicità di detti poli/zeri, in base alle variazioni di pendenza del diagramma in corrispondenza dei punti di rottura
  3. il coefficiente di guadagno K da:
    - a) il valore cui tende il diagramma delle ampiezze per  $\omega \rightarrow 0$ , se il tratto iniziale è a pendenza nulla
    - a) l'intersezione tra l'ordinata in  $\omega = 1$  e il tratto iniziale o il suo prolungamento, se questo **NON** è a pendenza nulla,

slide 61

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: primo esempio

➔ Si consideri:

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + 2s)(1 + 0.4s + s^2)}$$

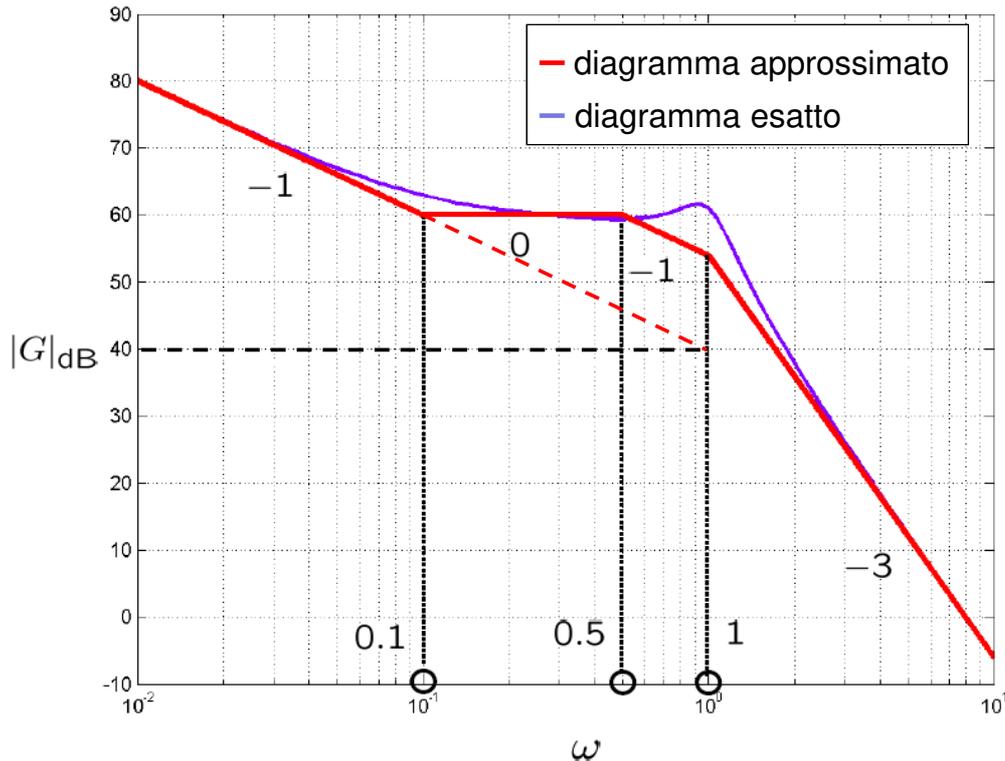
- $K = 100$  (40 dB)
- $z_1 = -0.1$
- $p_1 = 0$
- $p_2 = -0.5$
- $p_{3,4} = -0.2 \pm j\sqrt{0.96}$  ( $\omega_n = 1$ ;  $\delta = 0.2$ )

slide 62

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: primo esempio - ampiezza



slide 63

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: primo esempio - fase

➔ Applicando il fattore 4.81 per ottenere i punti di rottura:

- $z_1$ :  $\omega_{1a} = 0.1/4.81 = 0.0208$ ;  $\omega_{1b} = 0.1 \cdot 4.81 = 0.481$
- $p_2$ :  $\omega_{2a} = 0.5/4.81 = 0.1039$ ;  $\omega_{2b} = 0.5 \cdot 4.81 = 2.405$
- $p_{3,4}$ :  $\omega_{3a} = 1/(4.81^{0.2}) = 0.73$ ;  $\omega_{3b} = 1 \cdot 4.81^{0.2} = 1.369$

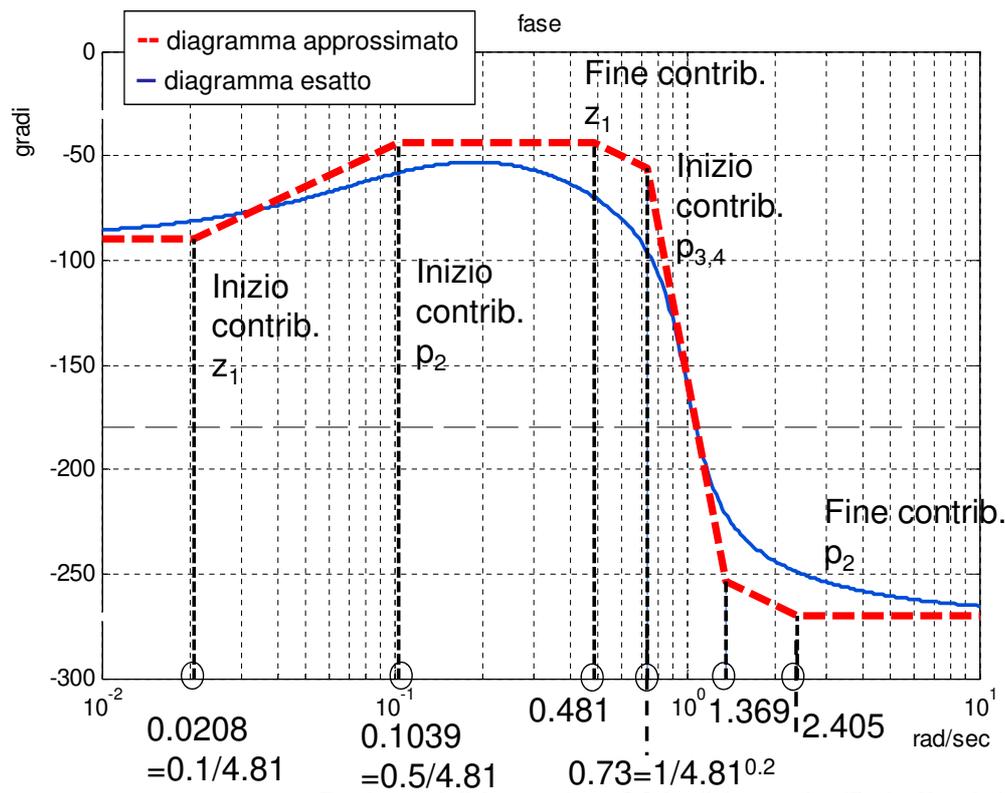
**N.B.:** il polo nell'origine  $p_1$  introduce inoltre uno sfasamento di  $-\pi/2$  su tutto il diagramma

slide 64

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: primo esempio - fase



slide 65

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: secondo esempio

► Si consideri:

$$G(s) = \frac{100(1 + 10s)}{s(1 + s)^2}$$

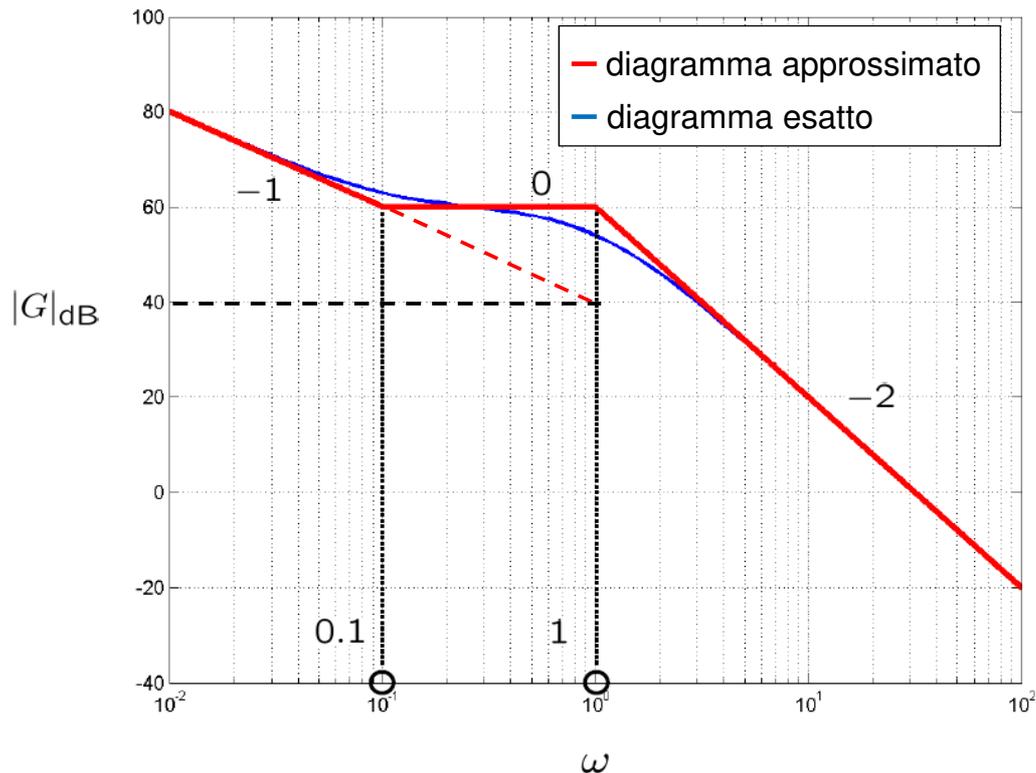
- $K = 100$  (40 dB)
- $z_1 = -0.1$
- $p_1 = 0$
- $p_2 = p_3 = -1$

slide 66

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: secondo esempio - ampiezza



slide 67

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: secondo esempio - fase

➔ Applicando il fattore 4.81 per ottenere i punti di rottura:

–  $z_1$ :  $\omega_{1a} = 0.1/4.81 = 0.0208$ ;  $\omega_{1b} = 0.1 \cdot 4.81 = 0.481$

–  $p_{2,3}$ :  $\omega_{2a} = 1/4.81 = 0.208$ ;  $\omega_{2b} = 4.81$

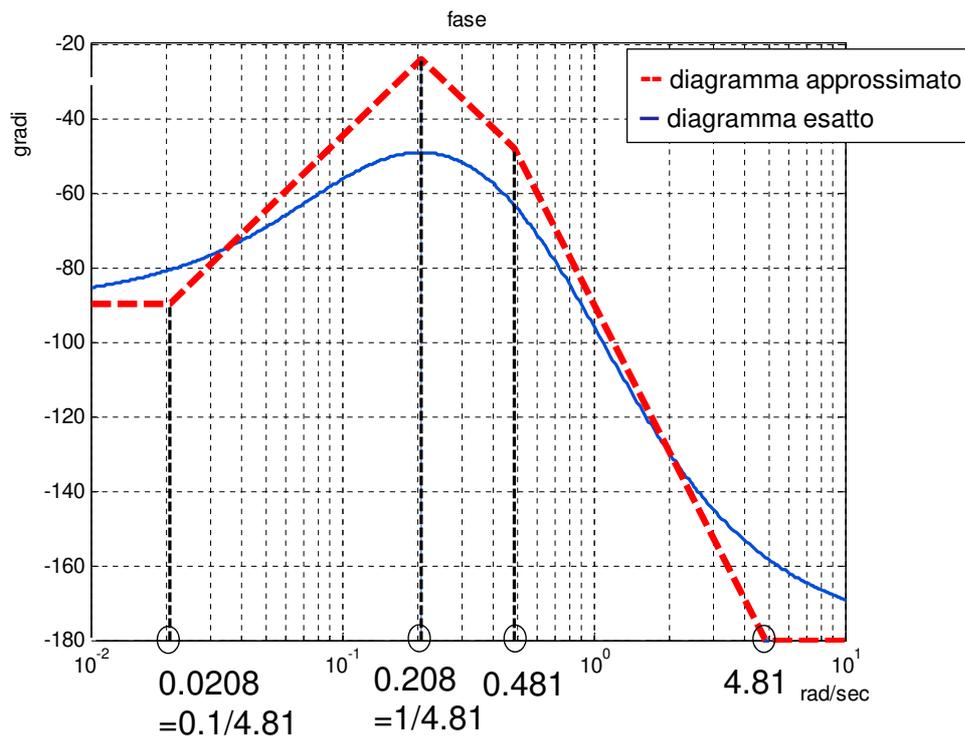
**N.B.:** il polo nell'origine  $p_1$  introduce uno sfasamento di  $-\pi/2$  su tutto il diagramma, il polo doppio in -1 ( $p_{2,3}$ ) determina punti di rottura del diagramma delle fasi calcolati come per qualsiasi polo reale, ma determina uno sfasamento complessivo di  $-\pi$

slide 68

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: secondo esempio - fase



slide 69

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: terzo esempio

➔ Si consideri:

$$G(s) = \frac{0.1s(1+s)}{(1+5s)^2(1+0.2s)(1-0.1s)}$$

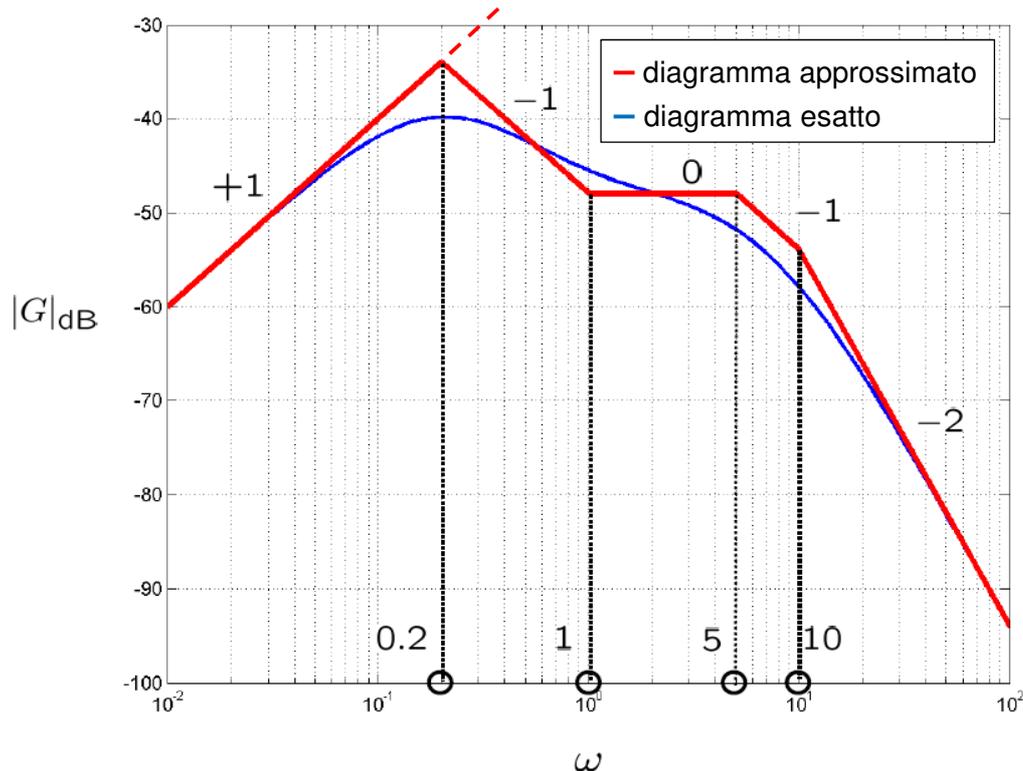
- $K = 0.1$  (-20 dB)
- $z_1 = 0$
- $z_2 = -1$
- $p_1 = p_2 = -0.2$
- $p_3 = -5$
- $p_4 = 10$

slide 70

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: terzo esempio - ampiezza



slide 71

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: terzo esempio - fase

➔ Applicando il fattore 4.81 per ottenere i punti di rottura:

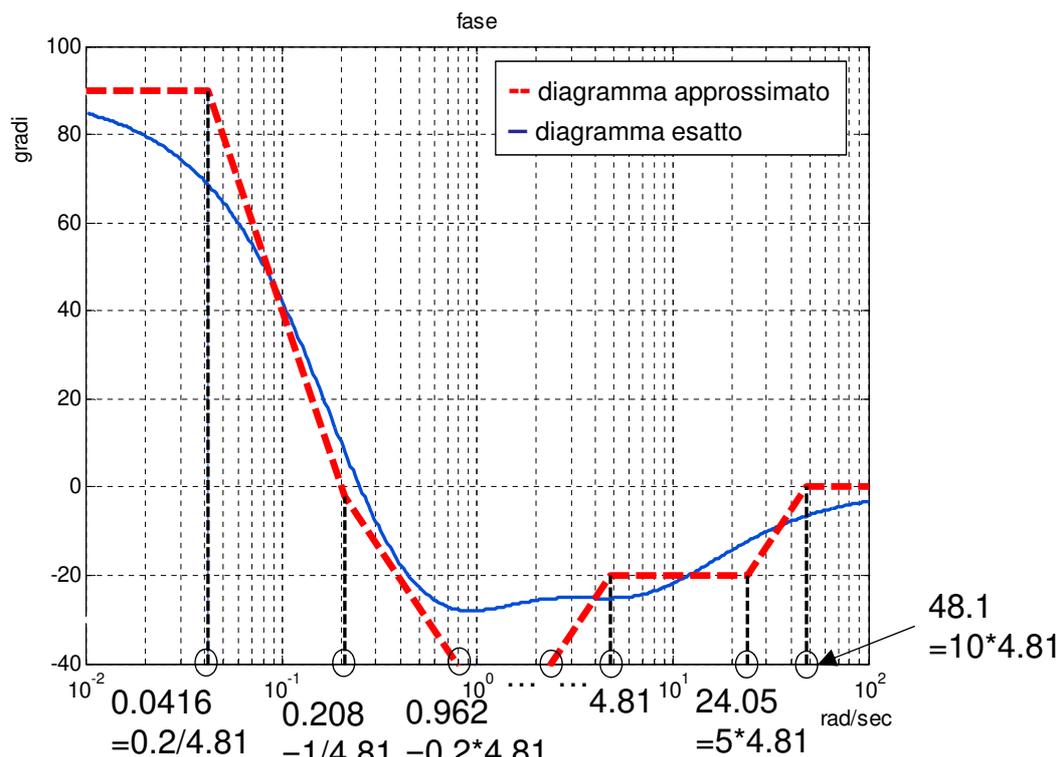
- $z_2$ :  $\omega_{2a} = 1/4.81 = 0.208$ ;  $\omega_{2b} = 4.81$
- $p_{1,2}$ :  $\omega_{1a} = 0.2/4.81 = 0.0416$ ;  $\omega_{1b} = 0.2 \cdot 4.81 = 0.962$
- $p_3$ :  $\omega_{3a} = 5/4.81 = 1.0395$ ;  $\omega_{3b} = 5 \cdot 4.81 = 24.05$
- $p_4$ :  $\omega_{4a} = 10/4.81 = 2.079$ ;  $\omega_{4b} = 10 \cdot 4.81 = 48.1$

slide 72

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: terzo esempio - fase



slide 73

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: quarto esempio

➔ Si considerino:

$$G'(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 0.2s + s^2)}$$

$$G''(s) = \frac{50(1 + 0.4s)}{(1 + 10s)(1 + 1.6s + s^2)}$$

–  $K = 50$  (34 dB)

–  $z_1 = -2.5$

–  $p_1 = -0.1$

–  $p'_2 = p'_3 = -0.1 \pm j\sqrt{0.99}$  ( $\omega_n = 1$ ;  $\delta = 0.1$ )

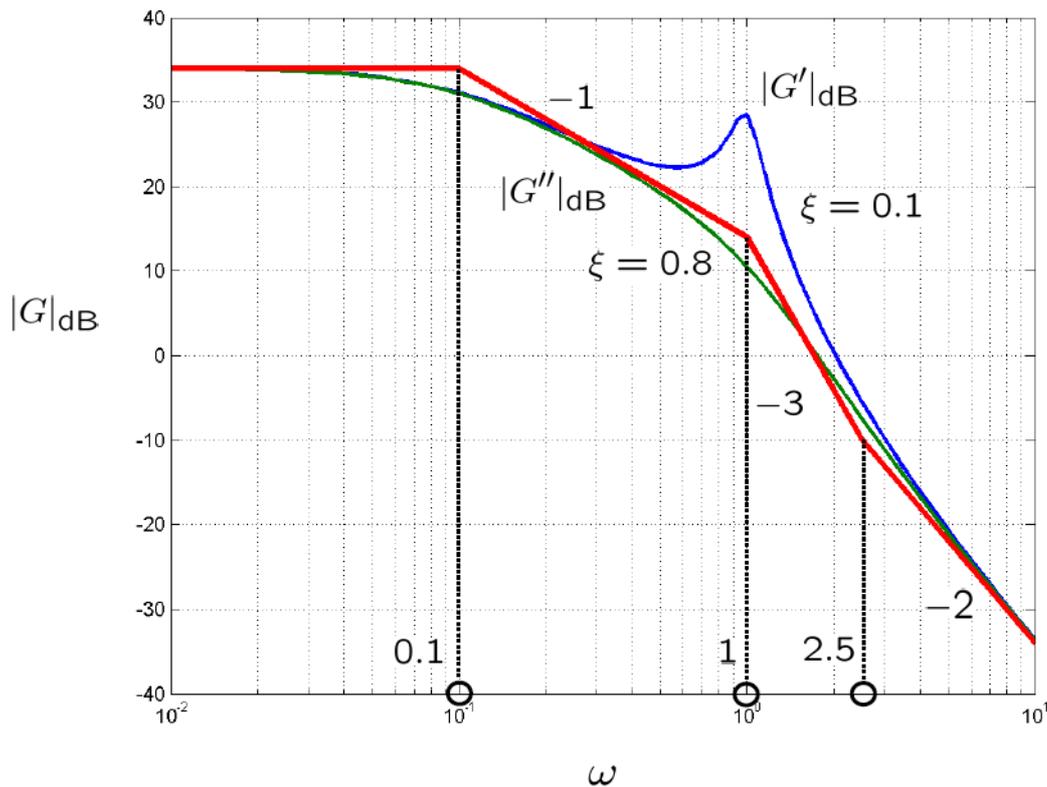
–  $p''_2 = p''_3 = -0.8 \pm j\sqrt{0.36}$  ( $\omega_n = 1$ ;  $\delta = 0.8$ )

slide 74

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: quarto esempio - ampiezza



slide 75

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: quarto esempio - fase

➔ Applicando il fattore 4.81 per ottenere i punti di rottura:

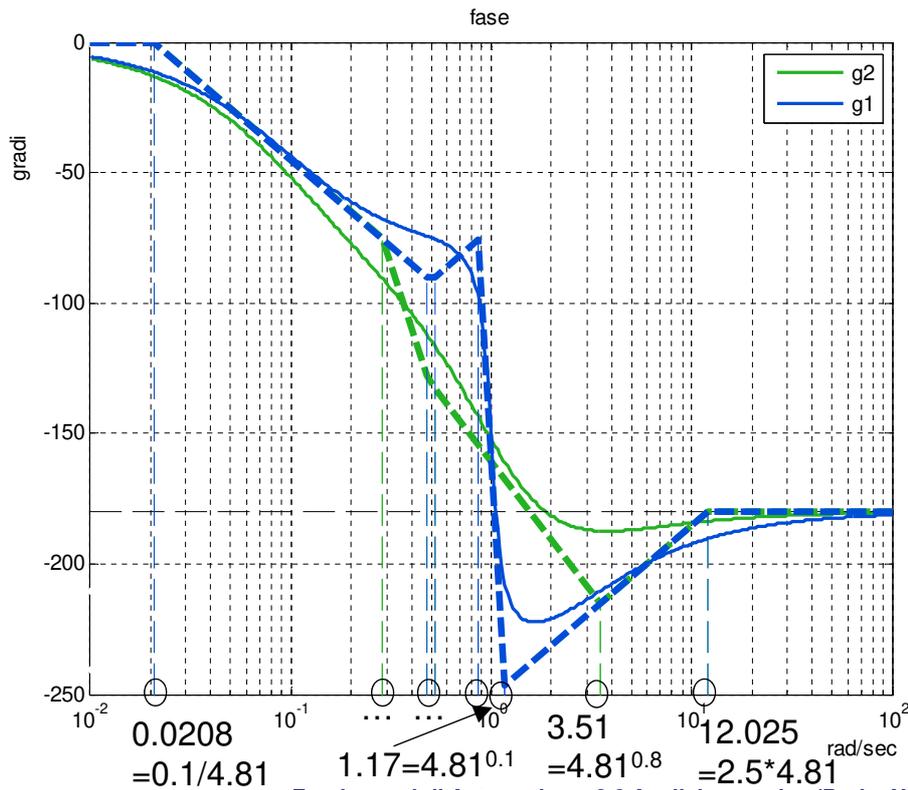
- $z_1$ :  $\omega_{z1a} = 2.5/4.81 = 0.518$ ;  $\omega_{z1b} = 2.5 \cdot 4.81 = 12.025$
- $p_1$ :  $\omega_{p1a} = 0.1/4.81 = 0.0208$ ;  $\omega_{p1b} = 0.1 \cdot 4.81 = 0.481$
- $p'_{2,3}$ :  $\omega_{2'a} = 1/(4.81^{0.1}) = 0.854$ ;  $\omega_{2'b} = 1 \cdot 4.81^{0.1} = 1.17$
- $p''_{2,3}$ :  $\omega_{2''a} = 1/(4.81^{0.8}) = 0.284$ ;  $\omega_{2''b} = 1 \cdot 4.81^{0.8} = 3.513$

slide 76

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi di Bode: quarto esempio - fase



slide 77

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Formula di Bode

- ➔ Un sistema avente funzione di trasferimento razionale si dice **a fase minima** se **non** ha né poli né zeri **a parte reale positiva** (oltre che costante di **guadagno positiva** e assenza di effetti di **ritardo puro** nella risposta)
- ➔ Per tali sistemi il diagramma di Bode delle fasi può essere ricavato da quello delle ampiezze, tramite la **formula di Bode**, approssimabile con:

$$\arg[G(j\omega)] \approx \frac{\pi}{2} \frac{d \log |G(j\omega)|}{d \log \omega}$$

slide 78

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Formula di Bode - 1

- ➔ Dalla formula approssimata, si può osservare che la pendenza unitaria, nel diagramma logaritmico delle ampiezze, corrisponde ad uno sfasamento di  $90^\circ$
- ➔ Dalla formula di Bode esatta (qui non riportata) si deduce che il diagramma ha sempre sfasamento minore rispetto ad un sistema avente lo stesso diagramma di Bode delle ampiezze, ma con zeri/poli a parte reale positiva
- ➔ Da questa ultima proprietà, deriva la definizione di sistema *a fase minima* della slide precedente

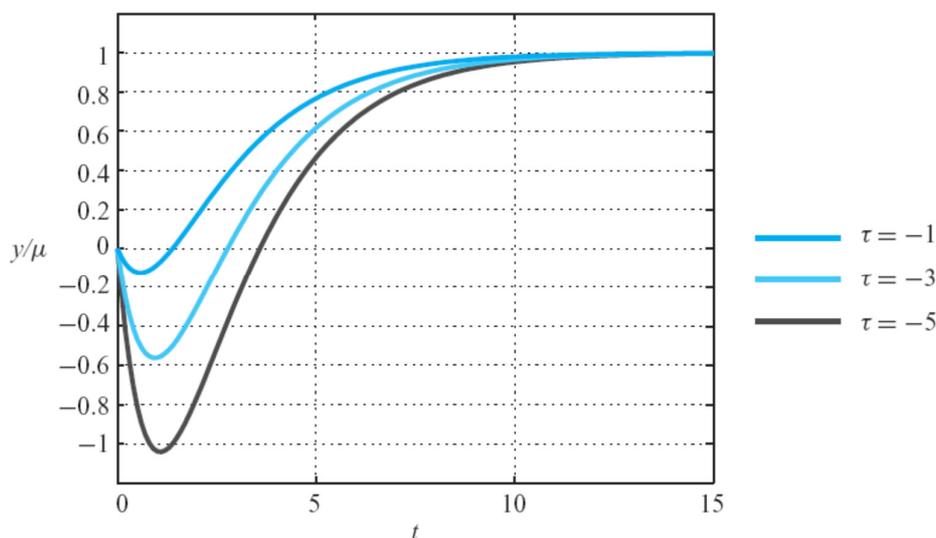
slide 79

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Sistemi a fase non minima

- ➔ Sistemi per i quali non vale la formula di Bode, **a fase non minima**, hanno caratteristiche che rendono difficile il progetto di controllo. Ad esempio, sistemi stabili ma con zeri a parte reale positiva, hanno il tipico *undershoot* nella risposta:



slide 80

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Sistemi a fase non minima - 1

- Tale comportamento è riscontrabile in numerosi sistemi fisici, come i veicoli a due ruote (biciclette e motociclette) e alcuni tipi di aerei
- Ad esempio, dall'analisi dinamica dei bicikli (seppure complessi e nonlineari) si può osservare che:
  - L'effetto di una forza applicata ad un lato del manubrio (coppia applicata allo sterzo) determina una inclinazione del veicolo rispetto alla verticale e, quindi, una deviazione dalla traiettoria rettilinea dal lato OPPOSTO
  - Pertanto, per curvare verso destra, occorre applicare una forza al lato sinistro del manubrio

**VEDI:** *Bicycle Dynamics and Control*, K.J.Astrom, R.E.Klein, A.Lennartson (IEEE Control Systems Magazine, Vol.25 N.4 2005)

slide 81

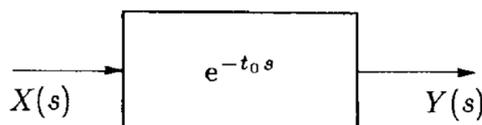
Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Sistemi a fase non minima - 2

- Un'altra condizione che rende un sistema a fase non minima e, pertanto, di difficile controllo, è la presenza di un **ritardo puro**, cioè un elemento per il quale vale la relazione tra il proprio ingresso e l'uscita:

$$y(t) = u(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = e^{-t_0 s} X(s)$$



- La FdT di tale blocco non è appunto a fase minima perché ha modulo unitario per ogni pulsazione, ma sfasamento che cresce linearmente:

$$\arg[G(j\omega)] = -\arctan(\tan \omega t_0) = -\omega t_0$$

slide 82

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



# Analisi armonica e metodi grafici

## DIAGRAMMI DI NYQUIST

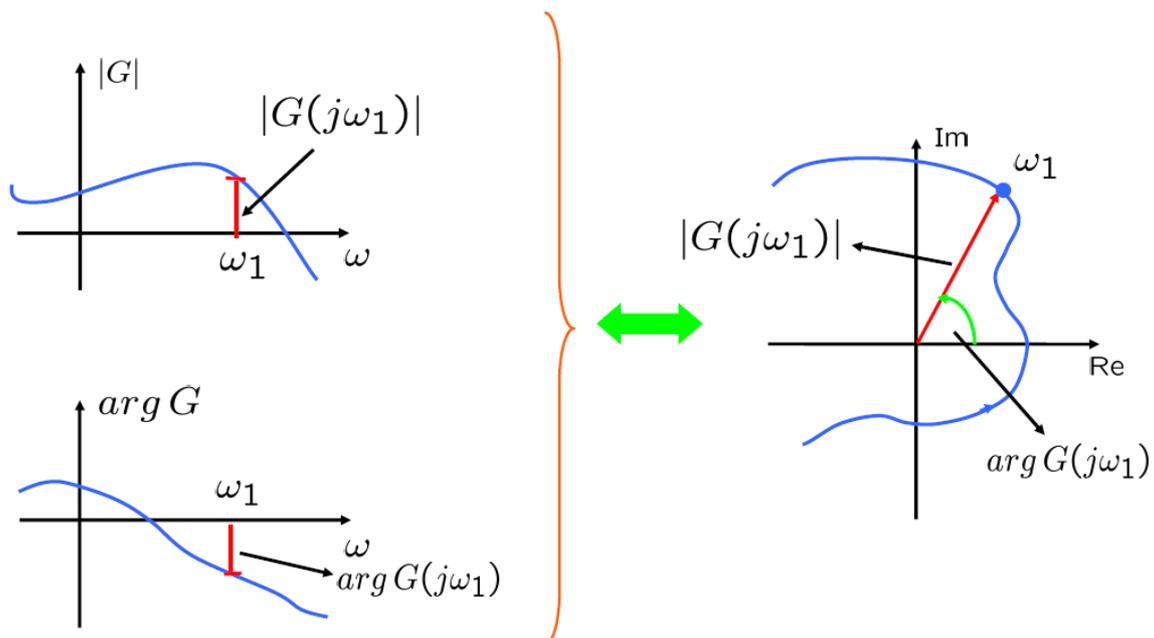
slide 83

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi polari o di Nyquist

- Sono diagrammi che rappresentano la risposta armonica direttamente sul piano di Gauss al variare della pulsazione



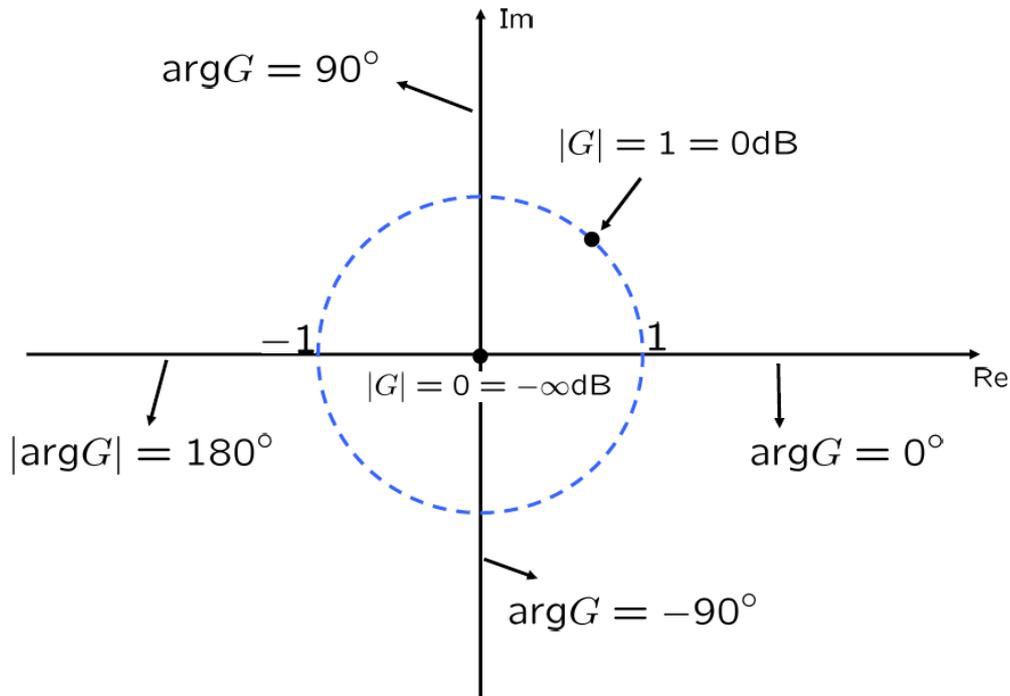
slide 84

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi polari o di Nyquist - 1

► Infatti, nel piano complesso:



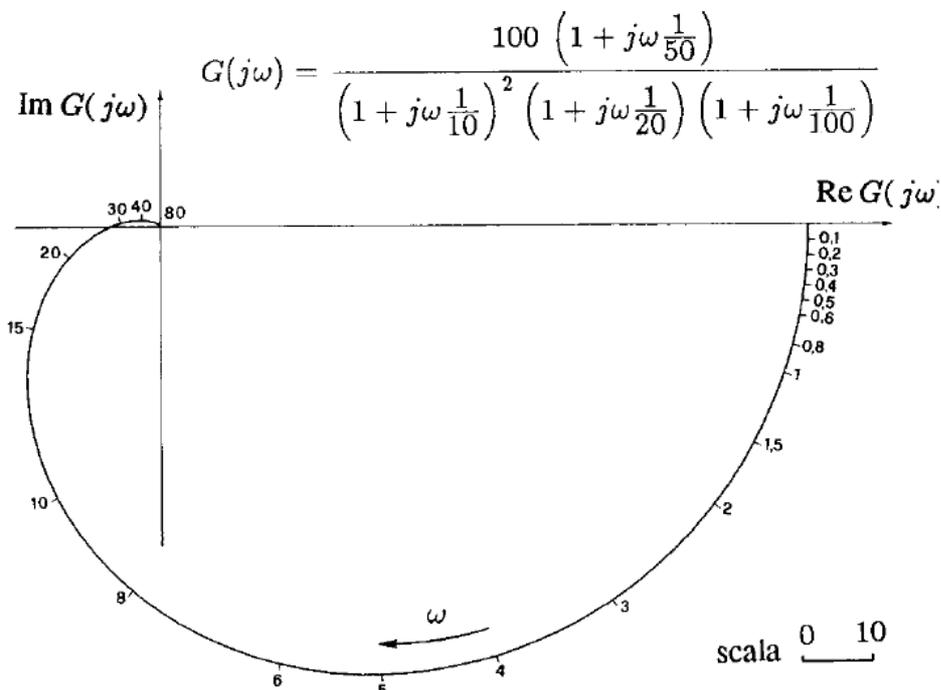
slide 85

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi polari o di Nyquist - 2

► Esempio senza poli nell'origine:



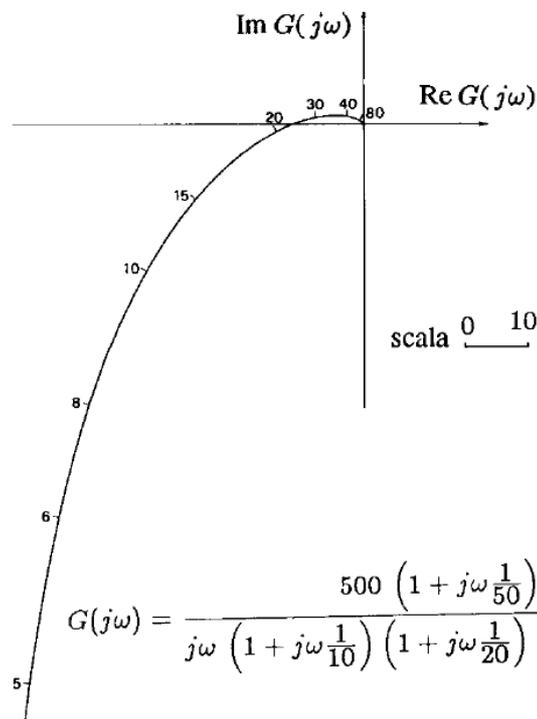
slide 86

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## Diagrammi polari o di Nyquist - 3

► Esempio con un polo nell'origine:



slide 87

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)



## ANALISI ARMONICA E METODI GRAFICI

- Risposta armonica
- Diagrammi di Bode
- Diagrammi di Nyquist (cenni)

**FINE**

slide 88

Fondamenti di Automatica – 2.3 Analisi armonica (Bode, Nyquist)

