Fondamenti di Automatica

Funzioni di trasferimento

Prof. Marcello Bonfè
Dipartimento di Ingegneria - Università di Ferrara
Tel. +39 0532 974839
E-mail: marcello.bonfe@unife.it

Funzioni di trasferimento
TRASFORMATE DI LAPLACE

Dallo spazio degli stati alle trasformazioni funzionali

- Nella modellazione di sistemi ingegneristici si è osservato come le leggi fisiche determinino modelli matematici espressi da <u>equazioni differenziali</u>
- Nella prima parte del corso, si è posta l'attenzione sulle variabili di stato dei sistemi, evidenziandone il ruolo con modelli ingresso-stato-uscita o *nello spazio degli stati*
- I modelli descrittivi dei sistemi LTI possono anche essere espressi con <u>equazioni differenziali di ordine ***n***</u>, del tipo:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 u$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{d^j y}{dt^j} = \sum_{j=0}^{m} b_j \frac{d^j u}{dt^j}$$

Dallo spazio degli stati alle trasformazioni funzionali-1

- Si noti che nell'equazione precedente l'ordine ***n*** è il massimo ordine di derivata dell'uscita *y*, mentre l'ordine massimo di derivata dell'ingresso *u* è indicato con ***m***
- Si supporrà sempre nel seguito ***n* ≥ *m***. Tale condizione non è restrittiva, in quanto corrisponde alla ***fisica realizzabilità*** (o *causalità*) del modello matematico
- Infatti, se fosse *n* < *m*, ad *u* sinusoidale di <u>frequenza infinita</u> corrisponderebbe *y* di <u>ampiezza infinita</u>, un <u>comportamento non riscontrabile in nessun sistema fisico</u>
- **Esempi base:**

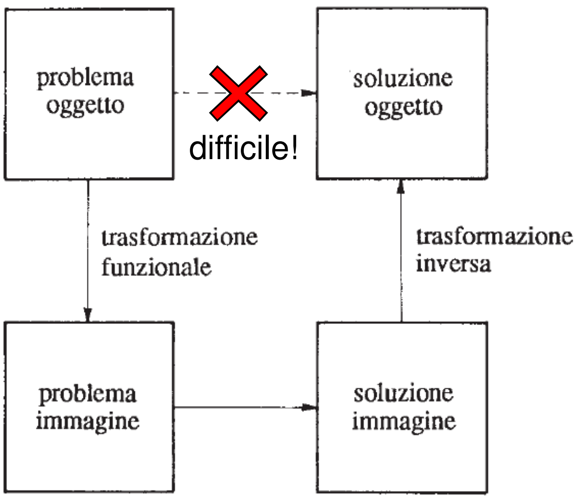
$\dot{y}(t) = u(t)$	$y(t) = \dot{u}(t)$
***n* = 1 > *m* = 0**	***n* = 0 < *m* = 1**
➔ fisicamente realizzabile!	**➔ NON fisicamente realizzabile!**

Dallo spazio degli stati alle trasformazioni funzionali-3

- Allo scopo di analizzare, con metodo indiretto e più semplice, l'equazione differenziale di ordine ***n*** nella forma considerata, risultano di notevole utilità le **trasformazioni funzionali**, cioè le trasformazioni che associano funzioni in un dominio (es. il tempo) a funzioni in un altro dominio, nel quale operazioni complicate (i.e. derivate e integrali) corrispondono a operazioni più semplici (i.e. prodotti e somme)
- Poiché le trasformazioni funzionali stabiliscono una relazione biunivoca tra funzioni nei due domini, la soluzione di un problema computazionale nel dominio di partenza può essere fatta in modo equivalente nel dominio delle funzioni trasformate

Dallo spazio degli stati alle trasformazioni funzionali-4

- La soluzione del problema può successivamente essere ricondotta al dominio di partenza grazie alla biunivocità della relazione introdotta dalla trasformazione funzionale
- Il problema di partenza viene detto **problema oggetto**, quello nel dominio trasformato **problema immagine**



Trasformate di Laplace

- La trasformazione funzionale più utile per l'analisi di equazioni differenziali è quella di **Laplace**
- La trasformazione di Laplace associa una funzione *f(t)* a valori reali (o complessi, NON di interesse per sistemi ingegneristici) del tempo ad una funzione *F(s)* a valori in genere complessi, definiti per valori di *s* complessi
- Si usa scrivere:

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right]$$

Trasformate di Laplace - 1

- La trasformata di Laplace di f(t) è definita come:

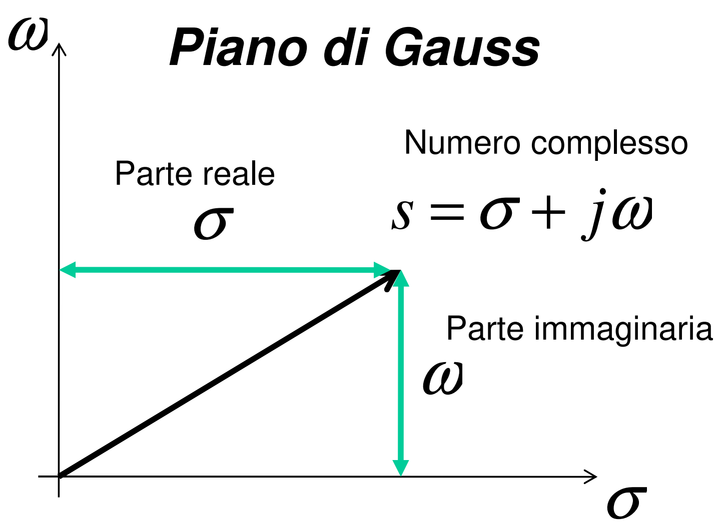
$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

- L'*antitrasformata* di Laplace di F(s) è definita:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

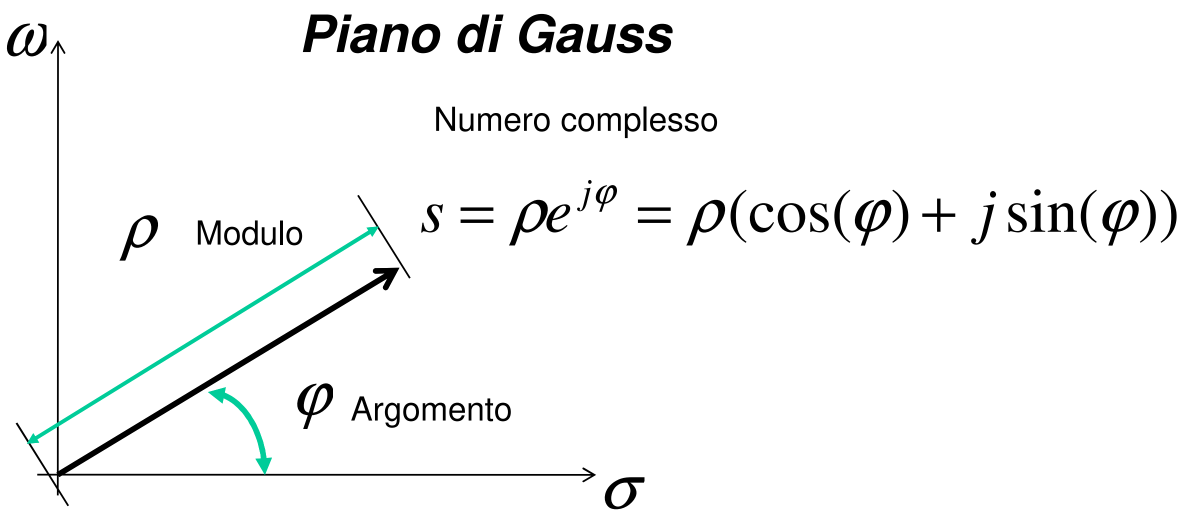
Trasformate di Laplace - 2

- Rappresentazione **cartesiana** di *s*:



Trasformate di Laplace - 3

- Rappresentazione **polare** di *s*:



Trasformate di Laplace - 4

- Nella forma cartesiana:
  – σ è la parte reale: $\sigma = \mathrm{Re}\{s\}$
  – ω è la parte immaginaria: $\omega = \mathrm{Im}\{s\}$
- Nella forma polare:
  – ρ è il modulo: $\rho = |s|$
  – φ è l'argomento: $\varphi = \arg\{s\}$

- Dalla relazione $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\,\mathrm{sen}\,\varphi$
  si deducono le seguenti formule per il passaggio dalla forma polare alla forma cartesiana e viceversa:

$$\sigma = \rho\cos\varphi, \quad \omega = \rho\sin\varphi$$

$$\rho = \sqrt{\sigma^2+\omega^2}, \quad \varphi = \arctan\frac{\omega}{\sigma} + \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{sign}\,\sigma)\,\mathrm{sign}\,\omega$$

Trasformate di Laplace: proprietà

- Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $f_1(t)$ ed $f_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $F_1(s)$ e $F_2(s)$, vale la relazione

$$\mathcal{L}\big[c_1\, f_1(t) + c_2\, f_2(t)\big] = c_1\, F_1(s) + c_2\, F_2(s)$$

- In corrispondenza di valori coniugati della variabile complessa s una generica trasformata di Laplace $F(s)$ assume valori coniugati, cioè vale la relazione

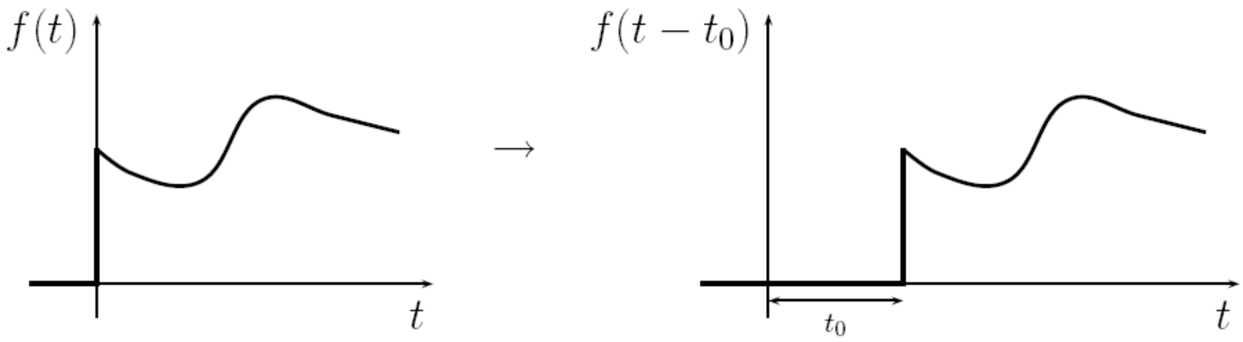
$$F(s^*) = F^*(s)$$

- Messa in scala: $f(at) \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{1}{a}\, F\!\left(\dfrac{s}{a}\right)$

Trasformate di Laplace: proprietà - 1

➡ **Traslazione nel tempo:**

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s}F(s)$$



Trasformate di Laplace: proprietà - 2

➡ **Trasformata dell'integrale:**

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$$

➡ **Trasformata della derivata:**

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$$

Trasformate di Laplace: proprietà - 3

Teorema del valore iniziale (valido per ogni *F(s)*):

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

Teorema del valore finale
(valido per opportune condizioni di convergenza della trasformata):

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Trasformate di Laplace: proprietà - 4

Teorema della traslazione in *s*:

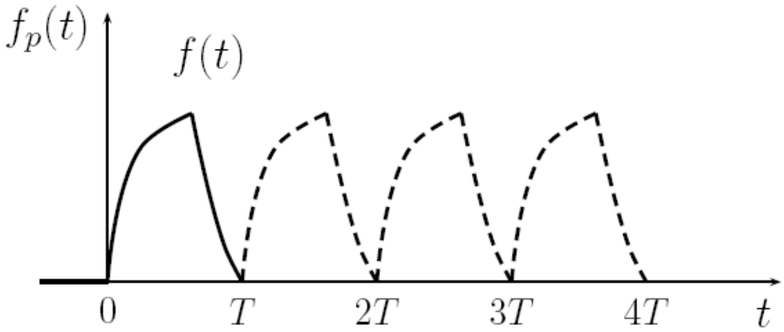
$$\mathcal{L}\left[e^{at} f(t)\right] = F(s-a)$$

Teorema della trasformata dell'integrale di convoluzione:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, d\tau\right] = F_1(s) F_2(s)$$

Trasformate di Laplace: proprietà - 5

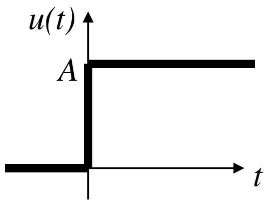
Trasformata di una funzione periodica:
Sia f(t) una funzione non nulla SOLO in $0 \leq t \leq T$ e $f_p(t)$ la funzione che si ottiene ripetendo in modo periodico f(t):



$$\mathcal{L}\left[f_p(t)\right] = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$$

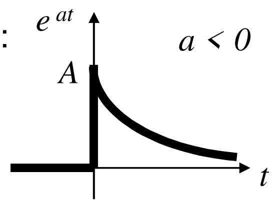
Trasformate di Laplace: esempi

Trasformata di segnale a gradino:
u(t) = 0 se t < 0
u(t) = A se t ≥ 0



$$\mathcal{L}\left[u(t)\right] = \int_0^\infty Ae^{-st}dt = \left[\frac{Ae^{-st}}{-s}\right]_0^\infty = \frac{A}{s}$$

Trasformata di segnale esponenziale:
f(t) = 0 se t < 0
f(t) = Ae^{at} se t ≥ 0



$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty Ae^{at-st}dt = \left[\frac{Ae^{-(s-a)t}}{-(s-a)}\right]_0^\infty = \frac{A}{s-a}$$

Trasformate di Laplace: esempi - 1

In generale, si dimostra che (con *n* intero positivo e *a* costante reale o complessa):

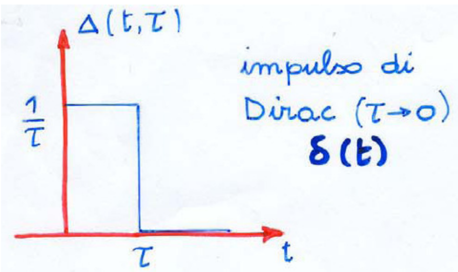
$$\mathcal{L}\left[t^n e^{at}\right] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

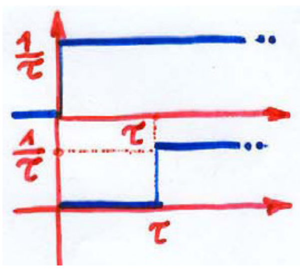
Si supporrà sempre, nel seguito, che le f(t) siano **nulle** per valori di tempo negativi
Dalle relazioni viste in precedenza, si possono ricavare le trasformate di Laplace della maggior parte dei segnali comunemente usati come ingressi di test per lo studio dei sistemi dinamici e delle prestazioni dei sistemi di controllo:

- Gradino unitario ➔ $f(t) = t^0$
- Rampa unitaria ➔ $f(t) = t^1$
- Esponenziale ➔ $f(t) = t^0 e^{at}$
- Sinusoide ➔ $\sin(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$
- Cosinusoide ➔ $\cos(\omega t) = \dfrac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$

Trasformate di Laplace: esempi - 2

Per il caso particolare dell'impulso di Dirac:
Si può definire la funzione impulso come il limite della differenza tra due gradini, uno dei quali traslato nel tempo



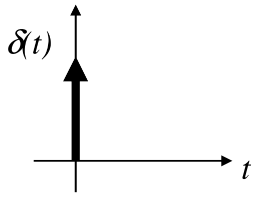


$$\mathcal{L}\left[\Delta(t,\tau)\right] = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s}e^{-\tau s} = \frac{1-e^{-\tau s}}{\tau s}$$

$$\lim_{\tau\to 0}\frac{1-e^{-\tau s}}{\tau s} = \underbrace{\lim_{\tau\to 0}\frac{s e^{-\tau s}}{s}}_{\text{Regola di de l'Hopital}} = 1$$

Trasformate di Laplace: riassunto dei segnali tipici

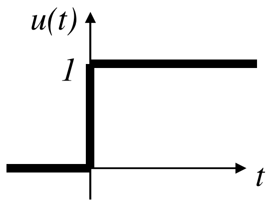
Impulso



$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

$$F(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = 1$$

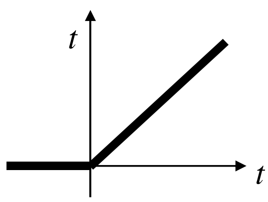
Gradino unitario



$$f(t) = u(t) = 1, \quad t > 0$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty 1 e^{-st} dt \\ &= -\frac{1}{s}\left\{ e^{-st}\big|_{t\to\infty} - e^{-st}\big|_{t\to 0} \right\} = \frac{1}{s} \end{aligned}$$

Rampa unitaria

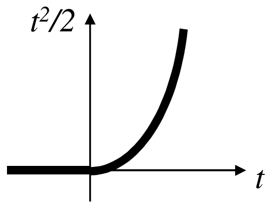


$$f(t) = t, \quad t > 0$$

$$F(s) = \mathcal{L}[t] = \int_0^\infty t e^{-st} dt = \frac{1}{s^2}$$

Trasformate di Laplace: riassunto dei segnali tipici-1

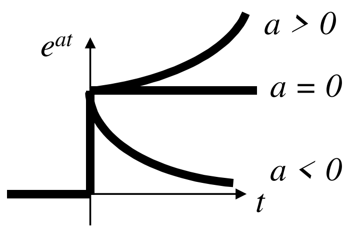
Parabola unitaria



$$f(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[t^2/2\right] = \int_0^\infty \frac{t^2}{2} e^{-st} dt = \frac{1}{s^3}$$

Esponenziale



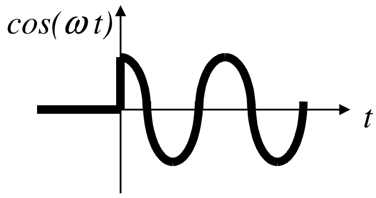
$$f(t) = e^{at}$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[e^{at}\right] = \int_0^\infty e^{at} e^{-st} dt = \frac{1}{s-a}$$

N.B.: l'impulso di Dirac è la derivata del gradino unitario ➔ $1 = s\,(1/s)$
il gradino unitario è la derivata della rampa unitaria ➔ $1/s = s\,(1/s^2)$
la rampa unitaria è la derivata della parabola unitaria ➔ $1/s^2 = s\,(1/s^3)$

Trasformate di Laplace: riassunto dei segnali tipici-2

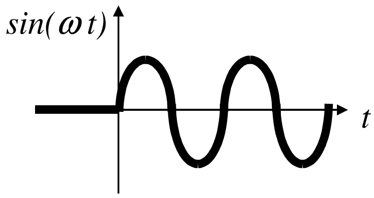
Cosinusoide



$$f(t) = \cos \omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\cos \omega t\right] = \int_0^\infty \cos wt \;\; e^{-st} dt = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

Sinusoide

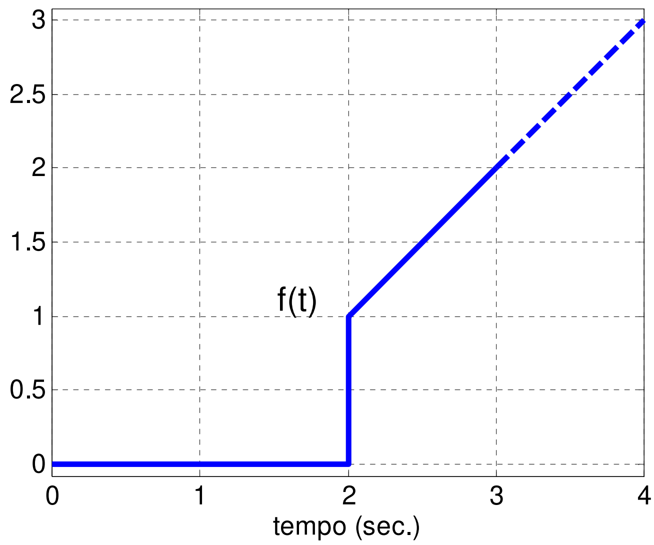


$$f(t) = \sin \omega t$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left[\sin \omega t\right] = \int_0^\infty \sin wt \;\; e^{-st} dt = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Trasformate di Laplace: esempi composti

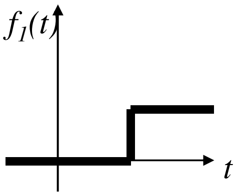
- **Dato un segnale composto da più contributi**:

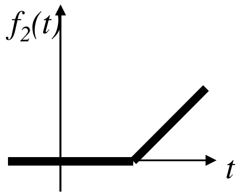


Si può scomporre il segnale come la somma di due funzioni elementari, entrambe ritardate di 2 sec., cioè un **gradino unitario** e una **rampa unitaria**

Trasformate di Laplace: esempi composti - 1

Pertanto: $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$





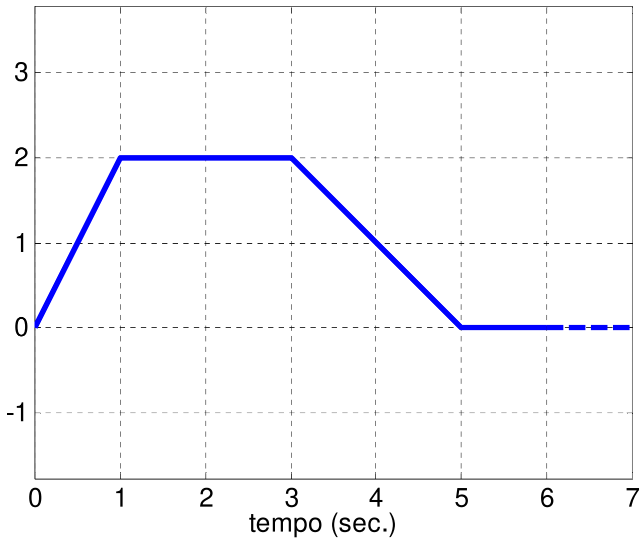
$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = u(t-2) + [u(t-2)](t-2)$$

$$\begin{aligned} F(s) &= F_1(s) + F_2(s) = \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) \\ &= e^{-2s}\left(\frac{s+1}{s^2}\right) \end{aligned}$$

Traslazione nel tempo all'istante t = 2 s

Trasformate di Laplace: esempi composti - 2

Il seguente segnale è invece composto dalla somma di <u>quattro</u> rampe:

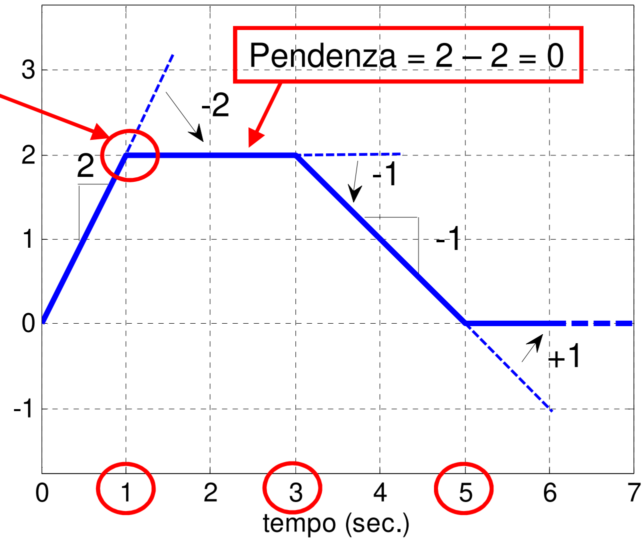


Infatti, in tal caso si deve osservare che ad ogni cambiamento di pendenza **(senza traslazione verticale, che corrisponderebbe alla somma con un gradino)** corrisponde la somma tra due rampe.

Trasformate di Laplace: esempi composti - 2a

- **Le caratteristiche da considerare per la trasformazione sono quindi gli istanti di cambiamento della pendenza e le <u>variazioni</u> della pendenza stessa**

Variazione di pendenza (Pendenza successiva – Pendenza precedente): 0 – 2 = –2



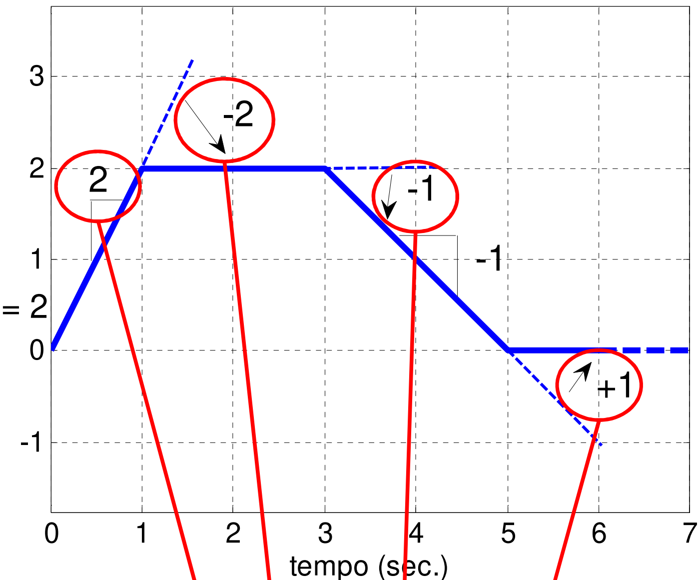
Pendenza di una retta tra due punti (t_1,f_1) e (t_2,f_2):
$k = (f_2 - f_1) / (t_2 - t_1)$

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) + F_4(s) = \frac{1}{s^2}\left(2 - 2e^{-s} - e^{-3s} + e^{-5s}\right)$$

Trasformate di Laplace: esempi composti - 2b

- **Dettaglio dei contributi**

Pendenza iniziale = 2

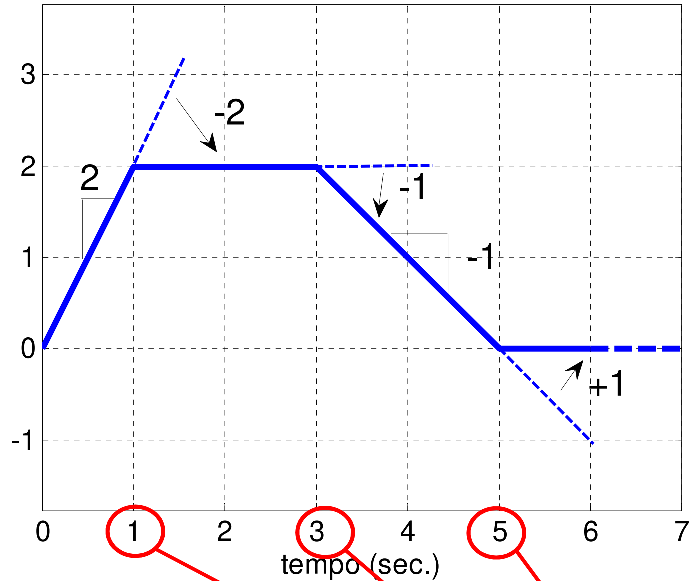


Pendenza finale = 0

$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left(2 - 2e^{-s} - e^{-3s} + e^{-5s}\right)$$

Trasformate di Laplace: esempi composti - 2c

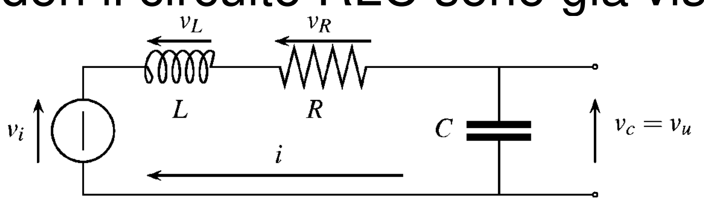
Dettaglio dei contributi: traslazioni nel tempo (termini $e^{-t_i s}$)



$$F(s) = \frac{1}{s^2}\left(2 - 2e^{-s} - e^{-3s} + e^{-5s}\right)$$

Trasformate di Laplace come modello dinamico

- Si consideri il circuito RLC serie già visto:



con $i(0^+) = i_0, \quad v_u(0^+) = e_0, \quad v_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t < 0 \\ v_0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

- Si desidera esprimere una relazione ingresso-uscita, cioè tra v_i e v_u:

$$v_i(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_u(t)$$

$$C\frac{dv_u(t)}{dt} = i(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C\frac{d^2v_u(t)}{dt^2}$$

Trasformate di Laplace come modello dinamico - 1

- A tale scopo si può esprimere il modello dinamico già visto come un'unica equazione differenziale del secondo ordine:

$$v_i(t) = LC\frac{d^2v_u(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_u(t)}{dt} + v_u(t)$$

- Applicando le regole per la trasformata della derivata:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dv_u(t)}{dt}\right] = sV_u(s) - e_0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d^2v_u(t)}{dt^2}\right] &= s\mathcal{L}\left[\frac{dv_u(t)}{dt}\right] - \frac{dv_u(t)}{dt}\Big|_{t=0^+} \\ &= s^2V_u(s) - se_0 - \frac{1}{C}i_0\end{aligned}$$

Trasformate di Laplace come modello dinamico - 2

- Si ottiene dunque:

$$V_i(s) = LC(s^2V_u(s) - se_0 - \frac{1}{C}i_0) + RC(sV_u(s) - e_0) + V_u(s)$$

- O anche (in forma USCITA ← INGRESSO)

$$V_u(s) = \underbrace{\frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}V_i(s)}_{\text{effetto dell'ingresso}} + \underbrace{\frac{Li_0 + LCse_0 + RCe_0}{LCs^2 + RCs + 1}}_{\text{effetto delle condizioni iniziali}}$$

Trasformate di Laplace come modello dinamico - 3

N.B.: il modello ottenuto con le trasformate di Laplace permette di calcolare la risposta del sistema note le condizioni iniziali e la trasformata di Laplace dell'ingresso $V_i(s)$, quest'ultima anche sfruttando (per segnali basati sulle funzioni tipiche) le regole grafiche viste in precedenza.

Ottenuta la $V_u(s)$, si può passare nuovamente al dominio del tempo, sfruttando l'antitrasformazione di Laplace ➔ $v_u(t)$

Funzioni di trasferimento
MODELLI INGRESSO-USCITA

Trasformata di Laplace di e^{At}

- Come si è visto in precedenza, l'esponenziale di matrice rappresenta la matrice di transizione di un sistema dinamico, soluzione dell'equazione differenziale matriciale

$$\dot{X}(t) = AX(t); \quad X(t_0) = I$$

- Pertanto la trasformata di Laplace di e^{At} corrisponde alla matrice complessa X(s), come ogni trasformata di una f(t)
- Inoltre, applicando il teorema della trasformata di derivata:

$$sX(s) - I = AX(s)$$

$$(sI - A)X(s) = I; \quad X(s) = \mathcal{L}\left[e^{At}\right]$$

Trasformata di Laplace di e^{At} - 1

- La matrice $(sI - A)$ è invertibile (determinante = polinomio caratteristico di A, quindi diverso dal polinomio nullo), quindi:

$$\mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1} = \frac{\text{agg}(sI - A)}{\det(sI - A)}$$

- Ogni elemento di $(sI - A)^{-1}$ è un rapporto tra due polinomi: quello a denominatore è il polinomio caratteristico di A (di grado *n*), quello a numeratore ha grado al massimo pari a *n-1*
- Se il polinomio caratteristico di A è diverso dal polinomio minimo, in ogni elemento di $(sI - A)^{-1}$ <u>ci sono delle radici comuni</u> tra numeratore e denominatore
- Eseguite tali <u>semplificazioni</u>, il minimo comune multiplo dei denominatori di $(sI - A)^{-1}$ è il polinomio minimo di A

Trasformata di Laplace di e^{At} - esempio

- Data la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\text{agg}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

Modello ingresso-uscita con trasformate di Laplace

- Tornando al modello nello spazio degli stati, con condizioni iniziali fissate:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad x(0) = x_0$$

applicando la trasformazione di Laplace:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s);\ \mathcal{L}[u(t)] = U(s);\ \mathcal{L}[y(t)] = Y(s);$$

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= (sI - A)^{-1} x_0 + (sI - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1} x_0 + [C(sI - A)^{-1} B + D] U(s) \end{aligned}$$

Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento

- L'equazione ottenuta:

$$Y(s) = C(sI-A)^{-1}x_0 + [C(sI-A)^{-1}B + D]U(s)$$

non è altro che la trasformata di Laplace della funzione di risposta:

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

- La matrice:

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D$$

è detta **matrice di trasferimento del sistema**

Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 1

- La **matrice di trasferimento** caratterizza il comportamento ingresso-uscita del sistema a partire da **x(0)=0**
- Tale modello matematico, seppure valido <u>solo</u> per stato iniziale nullo (o condizione di **quiete**), è comunque di notevole interesse pratico
- Analisi e simulazione del modello ingresso-uscita

$$Y(s) = G(s)U(s)$$

sono basate sulle proprietà delle trasformate di Laplace e le regole di antitrasformazione

Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 2

- La **matrice di trasferimento** è inoltre **univoca** e indipendente dalla scelta di variabili di stato
($x = Tz \iff z = T^{-1}x$):

$$
\begin{aligned}
\hat{G}(s) &= \hat{C}(sI-\hat{A})^{-1}\hat{B}+\hat{D} \\
&= C\left[T^{-1}(sI-TAT^{-1})^{-1}T\right]B+D= \\
&= C\left[T^{-1}(sTT^{-1}-TAT^{-1})^{-1}T\right]B+D= \\
&= C\left[T^{-1}\left(T(sI-A)T^{-1}\right)^{-1}T\right]B+D= \\
&= C\left[T^{-1}T(sI-A)^{-1}T^{-1}T\right]B+D= \\
&= C(sI-A)^{-1}B+D=G(s)
\end{aligned}
$$

Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 3

- Ogni elemento della **matrice di trasferimento** è il rapporto di due polinomi in *s*
- Quello a denominatore è il polinomio minimo di *A*
- Le radici del denominatore sono dette **poli del sistema** e corrispondono agli autovalori della matrice *A*
- I polinomi al numeratore negli elementi della $G(s)$ hanno grado inferiore a quello del polinomio minimo di *A* se *D* = 0 (sistema puramente dinamico), altrimenti hanno grado inferiore o uguale a quello del polinomio minimo di *A*

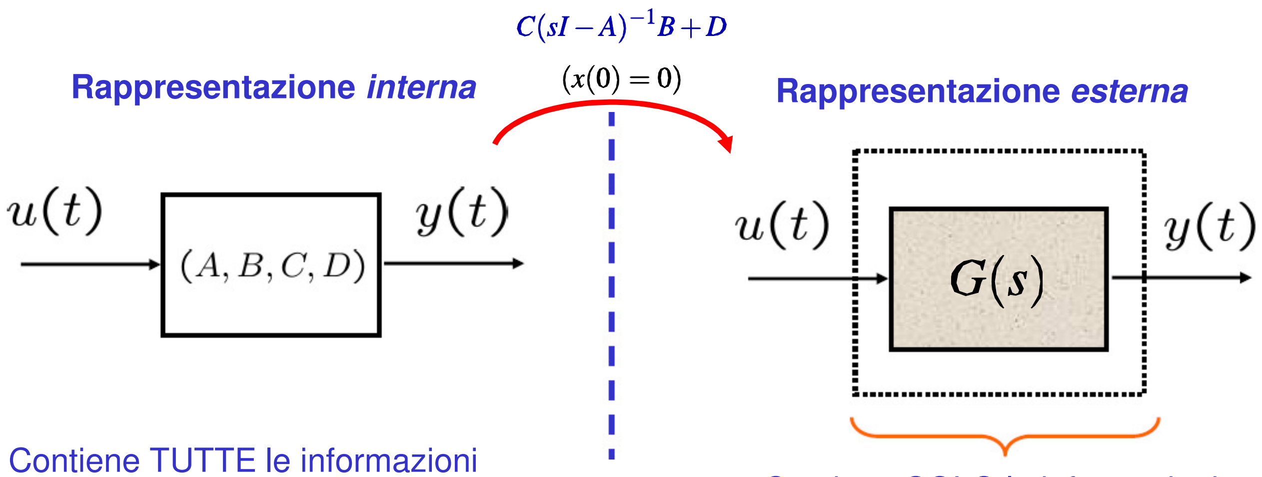
Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 4

- **NOTA BENE**: le proprietà precedenti della **matrice di trasferimento** sono in realtà valide se il modello nello spazio degli stati è **completamente raggiungibile-controllabile** e **completamente osservabile-ricostruibile**
- **In caso contrario,** vi saranno ulteriori cancellazioni nei termini a numeratori e denominatore della $G(s)$, per cui in generale (per un sistema non completamente raggiungibile-controllabile e/o non completamente osservabile-ricostruibile):

POLI DI G(s) $\subset$ AUTOVALORI DI A

Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 5

- La **matrice di trasferimento** è anche detta *rappresentazione esterna* del sistema:



Contiene TUTTE le informazioni sulla struttura interna (variabili di stato, ordine totale)

Contiene SOLO le informazioni sul legame tra ingresso e uscita

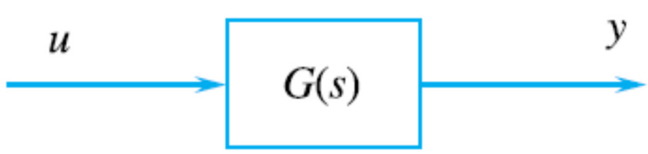
Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 6

- Per un sistema con un ingresso e una uscita o **SISO** (single-input single-output) la matrice di trasferimento si riduce a una funzione scalare, sempre definita come rapporto di due polinomi e chiamata **funzione di trasferimento**
- Nella funzione di trasferimento, le radici del numeratore sono detti **zeri del sistema**
- Data la funzione di trasferimento SISO, si può anche scrivere:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 7

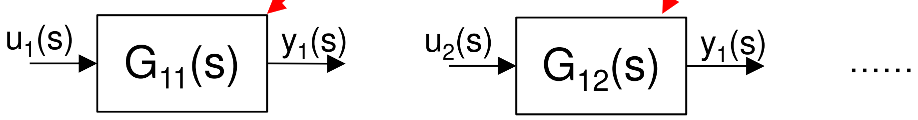
- La **funzione di trasferimento SISO** è tipicamente associata, nelle rappresentazioni grafiche con **diagrammi a blocchi**, alla relazione tra i segnali identificati dalle linee di collegamento orientate:



- Tale rappresentazione è di notevole efficacia perché permette, applicando opportune regole, di determinare le relazioni ingresso-uscita di sistemi complessi composti da più sotto-parti elementari

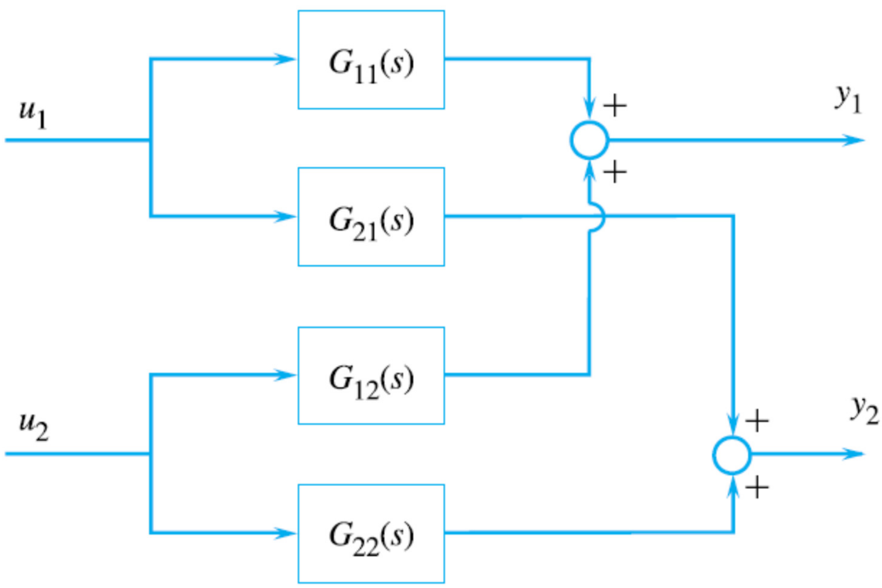
Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 8

- Per un sistema **MIMO** con r ingressi e m uscite la matrice di trasferimento (m x r) contiene in pratica $m\,r$ diverse funzioni di trasferimento SISO, se vengono considerate separatamente tutte le possibili coppie tra un ingresso e una uscita
- ES.: $$Y(s) = \begin{bmatrix} y_1(s) \\ y_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ -\frac{2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}}_{G(s)} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$



Modello ingresso-uscita: matrice di trasferimento - 9

- Per un sistema **MIMO** con 2 ingressi e 2 uscite:



Matrice di trasferimento e risposta impulsiva

- Per i sistemi puramente dinamici (matrice $D = 0$), la risposta impulsiva si esprime con:

$$W(t) = Ce^{At}B$$

- Applicando le trasformate di Laplace:

$$\mathcal{L}[W(t)] = C\mathcal{L}[e^{At}]B = C(sI - A)^{-1}B$$

- La **trasformata della risposta impulsiva** coincide pertanto con la **matrice di trasferimento** (nei sistemi completamente *raggiungibili-controllabili* e completamente *osservabili-ricostruibili*)

Funzione di trasferimento: espressione diretta

- Se il modello differenziale è espresso rispetto a u e y, senza evidenziare variabili di stato (per le quali si ipotizzano comunque condizioni iniziali nulle):

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0 y = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1}\frac{d^{m-1}u}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0 u$$

la funzione di trasferimento si ottiene applicando direttamente la trasformazione di Laplace e il relativo teorema della derivata (i.e. $df/dt \rightarrow sF(s)$):

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0)Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0)U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0}}$$

Funzione di trasferimento: espressione diretta - 1

- Si ricordi che nella funzione di trasferimento si suppone ***n*** $\geq$ ***m***, condizione detta di *fisica realizzabilità*
- Si dice anche che un modello matematico fisicamente realizzabile descrive un **sistema non anticipativo** o **causale**
- Tale condizione è implicitamente verificata se la funzione di trasferimento è ottenuta a partire dalle matrici A,B,C,D del modello ingresso-stato-uscita, perché quest'ultimo impone sempre una scelta di causalità *corretta*

Funzione di trasferimento: causalità

- **Esempi base** sulla scelta della causalità:

Da: $\dot{y}(t) = u(t)$ **si può porre:** $y(t) = x(t)$

quindi: $\dot{x}(t) = u(t)$

Modello nello spazio degli stati

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= 0\,x(t) + 1\,u(t) \\ y(t) &= 1\,x(t) + 0\,u(t) \end{cases}$$

➔ ***A = 0, B = 1, C = 1, D = 0***

Funzione di trasferimento

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = s^{-1} = \frac{1}{s}$$

Funzione di trasferimento: causalità

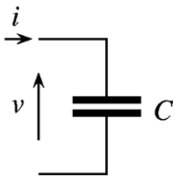
- **Esempi base** sulla scelta della causalità:

  Da: $y(t) = \dot{u}(t)$ **NON è possibile trovare un modello nello spazio degli stati in forma:**

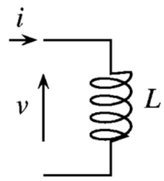
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

  → **NON fisicamente realizzabile!**

NOTA: Questo è il motivo per cui non si può imporre come ingresso di un condensatore la tensione ai suoi capi, oppure imporre come ingresso di una induttanza la corrente in essa..



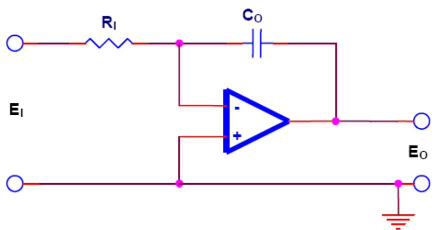
Causalità realizzabile:
corrente (u) → tensione (y)



Causalità realizzabile:
tensione (u) → corrente (y)

Funzione di trasferimento: realizzazione (cenno)

- **Se** l'equazione differenziale singola di ordine ***n*** è *fisicamente realizzabile* esistono **infinite possibili scelte di matrici (A,B,C,D)** che *realizzano* tale funzione di trasferimento
- In letteratura, esistono cosiddette *realizzazioni canoniche*, principalmente orientate alla costruzione di circuiti elettronici analogici con amplificatori operazionali



Funzioni di trasferimento
DIAGRAMMI A BLOCCHI
(e SISTEMI INGEGNERISTICI)

Sistemi interconnessi: diagrammi a blocchi

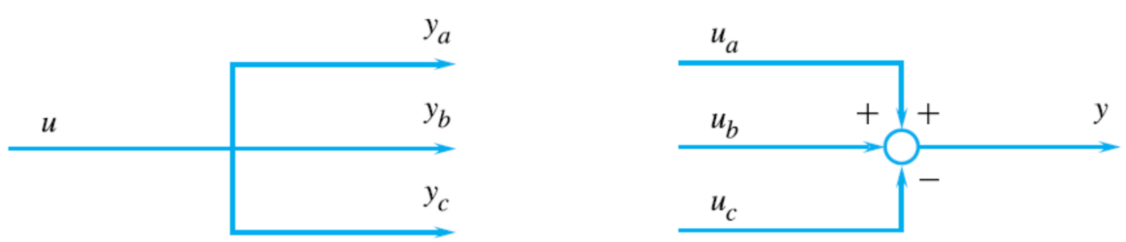
- Le proprietà delle trasformate di Laplace permettono di utilizzare delle regole grafiche per combinare le funzioni di trasferimento associate agli elementi di un **diagramma a blocchi**
- Grazie alla rappresentazione con funzioni di trasferimento infatti, il collegamento tra ingressi e uscite di due sotto-sistemi può essere espresso tramite il prodotto delle trasformate dei segnali con le relative funzioni di trasferimento

Sistemi interconnessi: diagrammi a blocchi - a

- **NOTA:** si supporrà nel seguito che nelle interconnessioni tra blocchi, con particolare riferimento a connessioni in cascata, siano trascurabili gli *effetti di carico*
- Gli effetti di carico sono quelle interazioni tra componenti fisici (elettrici, meccanici, ecc.) che ne modificano le rispettive funzioni di trasferimento, quando essi vengono accoppiati l'uno all'altro (vedi oltre in questa presentazione, da slide 98)

Sistemi interconnessi: diagrammi a blocchi - 1

- Nei diagrammi a blocchi l'interconnessione tra sistemi sfrutta le **diramazioni grafiche** dei segnali e **nodi sommatori**:

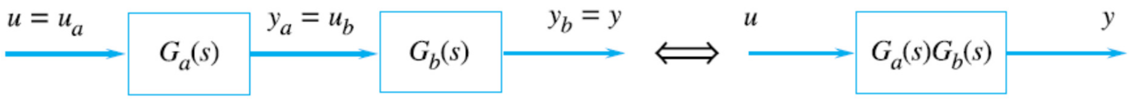


DIRAMAZIONE:
$y_a = y_b = y_c = u$

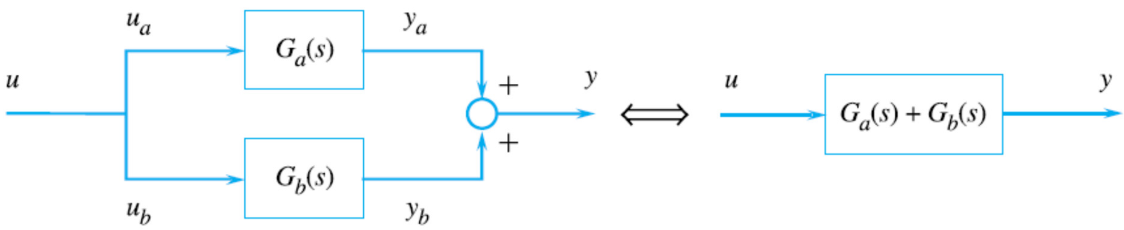
NODO SOMMATORE:
$y = u_a + u_b - u_c$

Regole per la riduzione dei diagrammi a blocchi

- **Connessione** di due sistemi **in serie**:

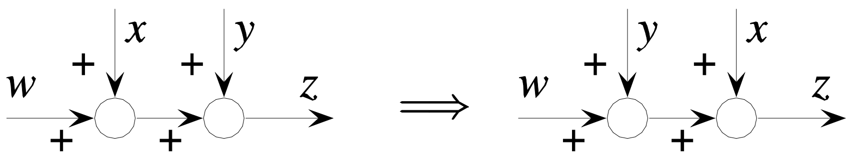


- **Connessione** di due sistemi **in parallelo**:

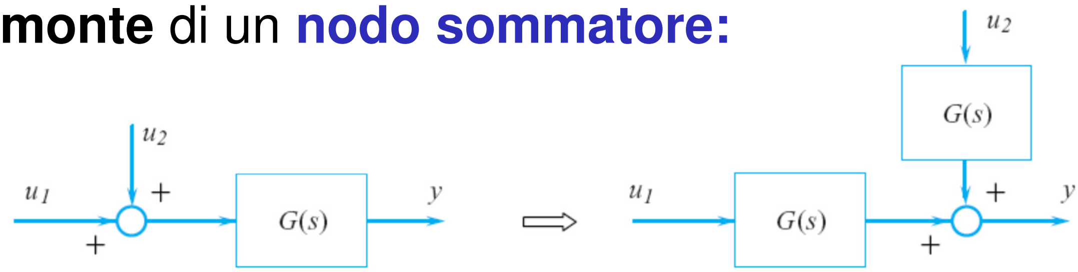


Regole per la riduzione dei diagrammi a blocchi - 1

- **Scambio** di due **nodi sommatori**:

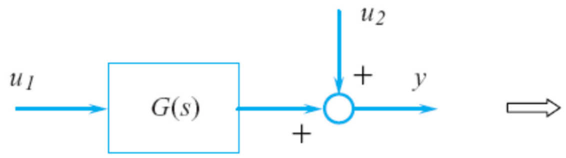


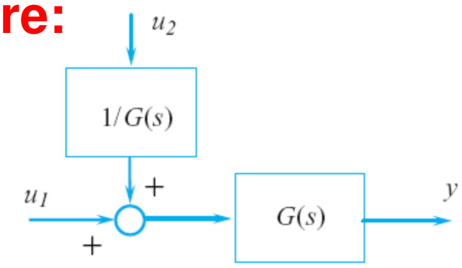
- **Spostamento di un segnale a valle** o, equivalentemente, **spostamento di un blocco a monte** di un **nodo sommatore:**



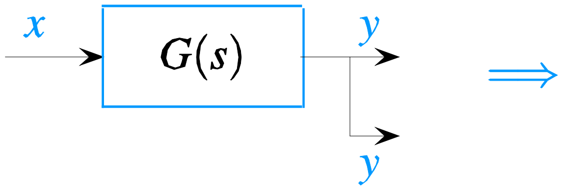
Regole per la riduzione dei diagrammi a blocchi - 2

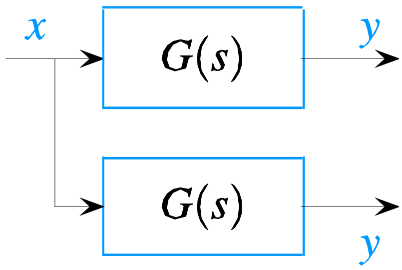
- **Spostamento di un segnale a monte** o, equivalentemente, **spostamento di un blocco a valle** di un **nodo sommatore:**





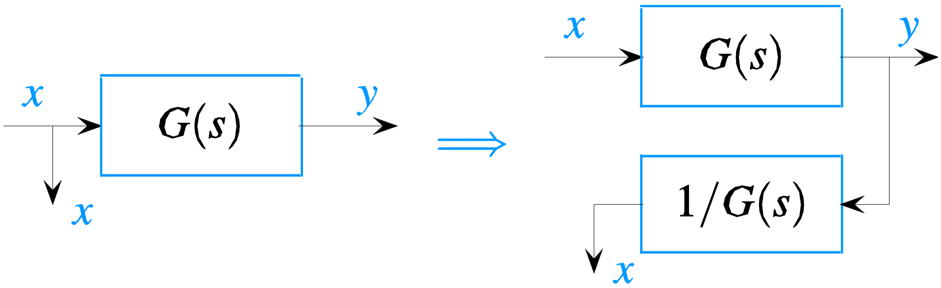
- **Spostamento di una diramazione a monte** di **un blocco:**



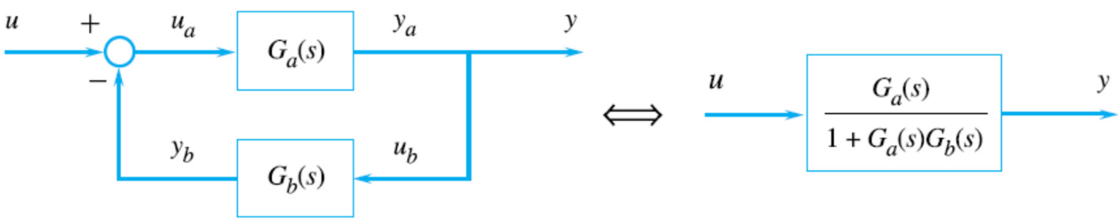


Regole per la riduzione dei diagrammi a blocchi - 3

- **Spostamento di una diramazione a valle** di **un blocco:**

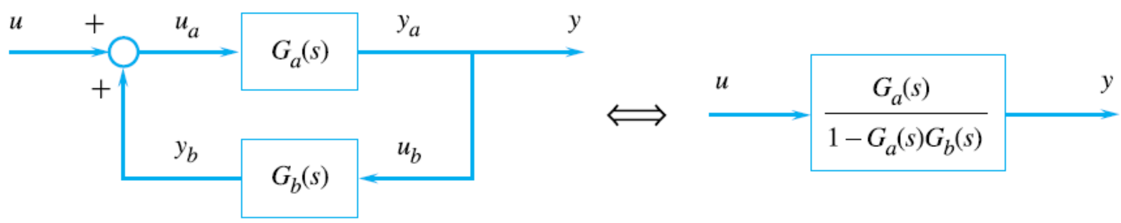


- **Riduzione di un anello** di **retroazione negativa:**

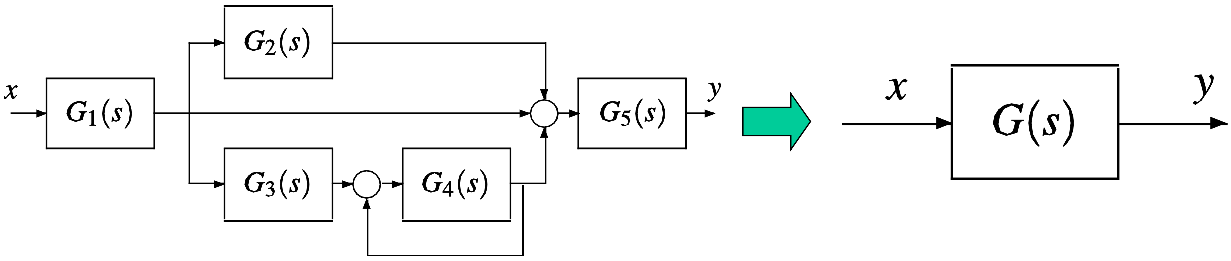


Regole per la riduzione dei diagrammi a blocchi - 4

- **Riduzione di un anello** di **retroazione positiva:**

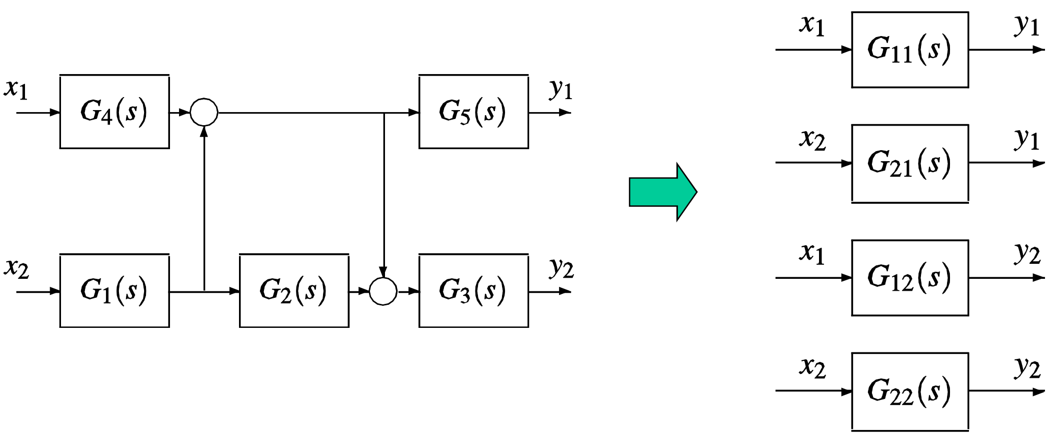


N.B.: applicando le 9 regole viste, uno schema con un ingresso e una uscita si riduce ad un solo blocco:



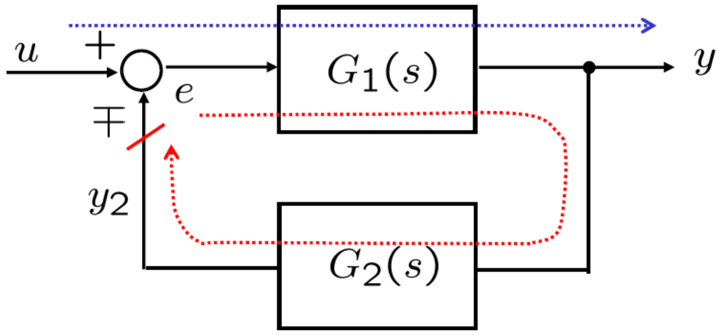
Regole per la riduzione dei diagrammi a blocchi - 5

N.B.: applicando le 9 regole viste a un sistema MIMO (*r* ingressi e *m* uscite) si ottiene invece uno schema con *m r* blocchi:



Riduzione diagrammi a blocchi: osservazioni

- Nello schema in retroazione, la funzione di trasferimento ad anello chiuso (*closed-loop*) è:



$$G_{c.l.} = \frac{\text{RAMO DIRETTO}}{1 \pm \text{F.D.T. DI ANELLO}}$$

Riduzione diagrammi a blocchi: osservazioni - 1

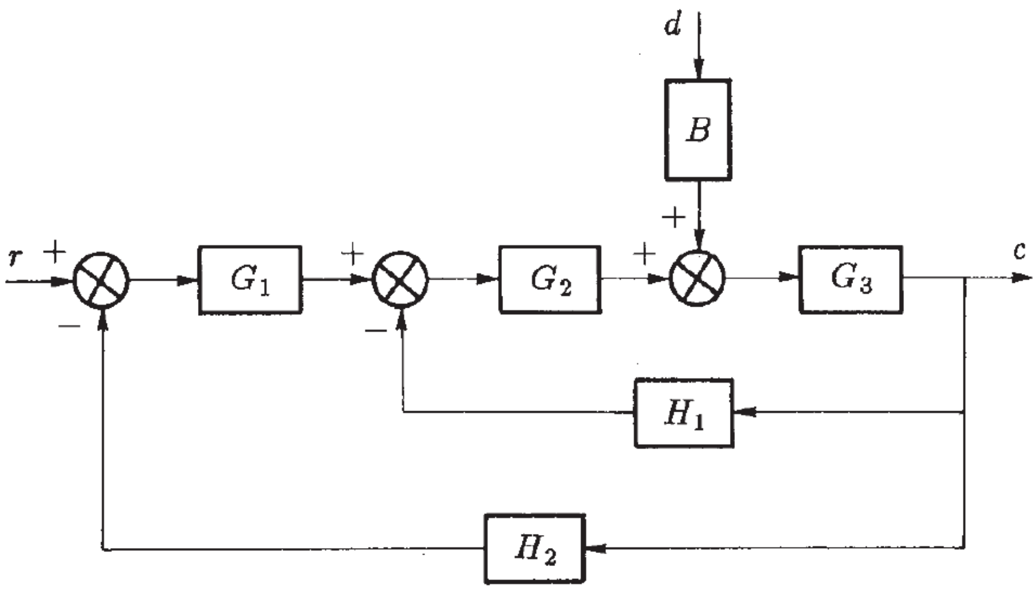
- La **funzione di trasferimento di anello** si ottiene moltiplicando quelle di **tutti** i blocchi presenti nell'anello di retroazione, aprendo quest'ultimo in **un punto qualunque**
- Le proprietà della funzione di trasferimento di anello, poichè si trova al <u>denominatore</u> della funzione di trasferimento ad anello chiuso, risulteranno di grande importanza nello studio della stabilità

Riduzione diagrammi a blocchi: osservazioni - 2

- La rielaborazione dei diagrammi a blocchi è lecita **soltanto** per calcolare la funzione di trasferimento complessiva
- Il sistema originario e quello ridotto potrebbero infatti **non avere la stessa struttura** in termini di variabili di stato
- Ovviamente, viene preservato il **comportamento ingresso-uscita**

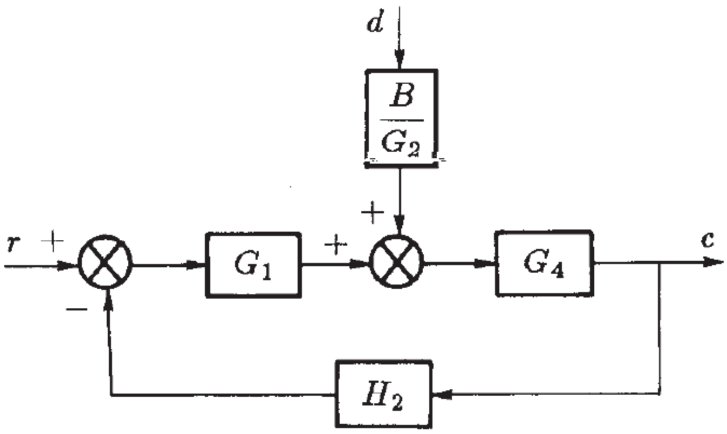
Riduzione diagrammi a blocchi: primo esempio

- Schema di partenza:



Riduzione diagrammi a blocchi: primo esempio - 1

- Si noti che il blocco B entra in un nodo sommatore che *interrompe* l'anello $G_1 \rightarrow G_3 \rightarrow H_1$
- E' quindi necessario spostare (a monte) tale nodo sommatore per poter ridurre l'anello considerato:

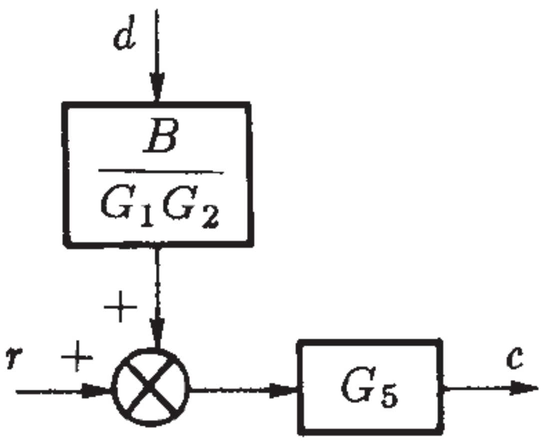


CON:

$$G_4 = \frac{G_2 G_3}{1 + G_2 G_3 H_1}$$

Riduzione diagrammi a blocchi: primo esempio - 2

- La stessa operazione è ancora necessaria per poter ridurre l'anello $G_1 \rightarrow G_4 \rightarrow H_2$:

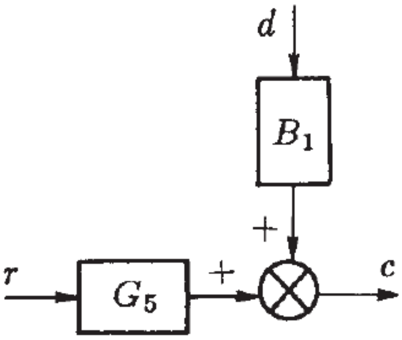


CON:

$$G_5 = \frac{G_1 G_4}{1 + G_1 G_4 H_2}$$

Riduzione diagrammi a blocchi: primo esempio - 3

- E' ora possibile spostare il nodo sommatore (a valle) rimanente per evidenziare la struttura MISO (2 ingressi, una uscita):



CON:

$$B_1 = \frac{BG_5}{G_1 G_2}$$

- Alla fine:

$$c = \frac{G_1 G_2 G_3 r + B G_3 d}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

Riduzione diagrammi a blocchi: primo esempio - 4

N.B.: lo schema analizzato ha in effetti due ingressi, *r* e *d*, per cui si può osservare che la funzione di trasferimento ottenuta contiene la **sovrapposizione di due effetti** (proprietà tipica dei sistemi lineari).

Per risolvere alcuni tipi di problemi (es. errore a regime sul set-point *r* vs. analisi di sensitività al disturbo *d*) può essere utile analizzare separatamente i due effetti:

$$c = \frac{G_1 G_2 G_3 r}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

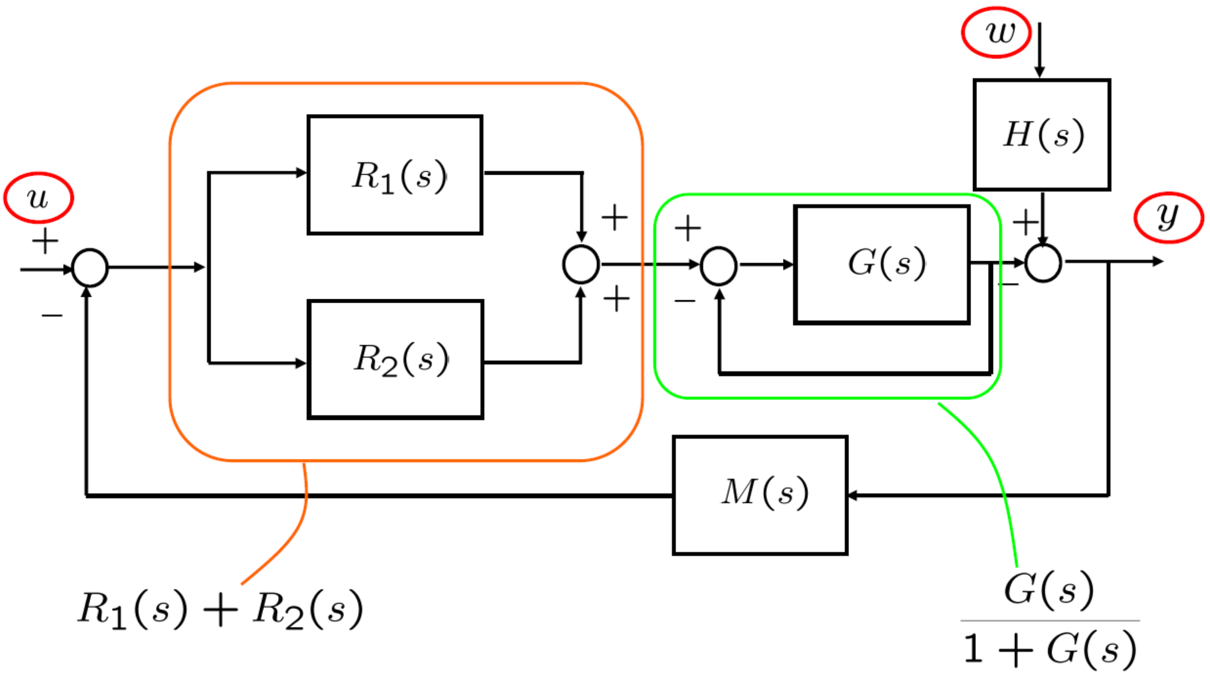
Valida se $r \neq 0$ e $d = 0$

$$c = \frac{B G_3 d}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

Valida se $d \neq 0$ e $r = 0$

Riduzione diagrammi a blocchi: secondo esempio

- Schema di partenza:



Riduzione diagrammi a blocchi: secondo esempio -1

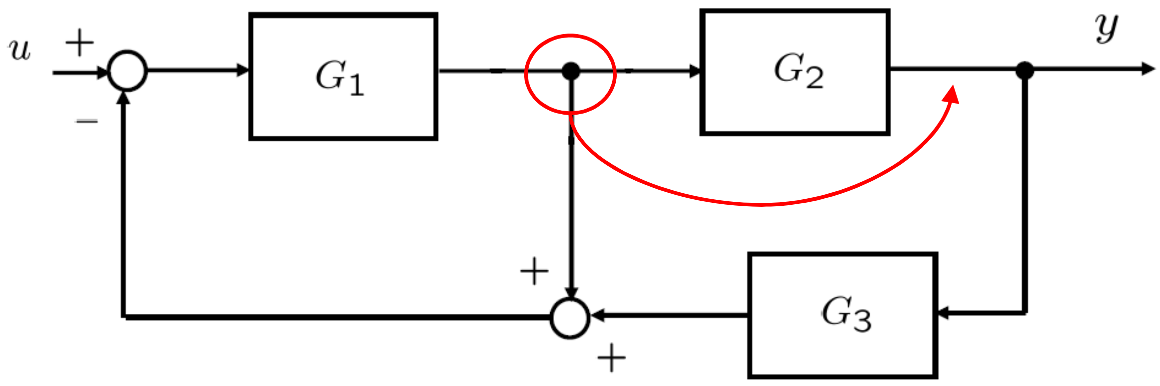
- Si noti che l'anello che include G(s) ha un ramo di retroazione a **guadagno unitario**, inoltre può essere ridotto in modo indipendente perché la retroazione si dirama prima del nodo sommatore in cui entra H(s)w
- Le due funzioni di trasferimento u → y e w → y sono rispettivamente:

$$F_1(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-[R_1 + R_2]\frac{G}{1+G}}{1 - [R_1 + R_2]\frac{G}{1+G}M}$$

$$F_2(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{H}{1 - [R_1 + R_2]\frac{G}{1+G}M}$$

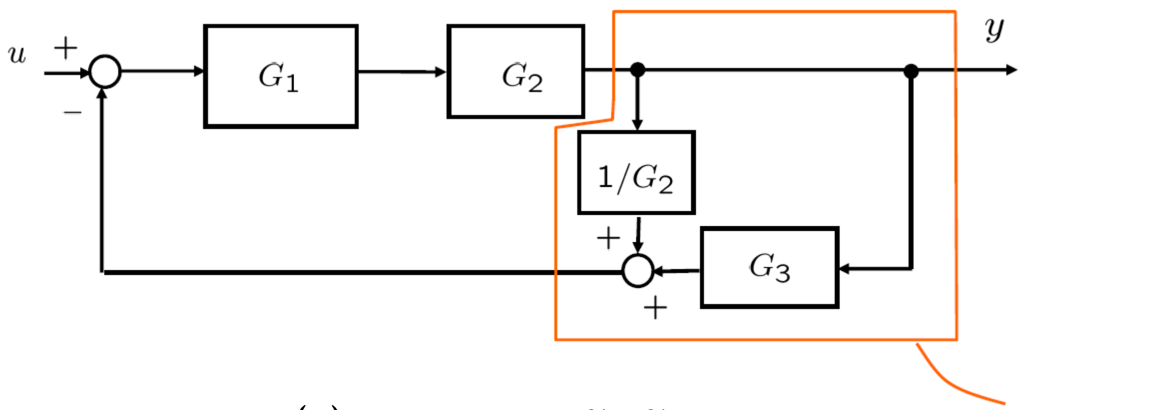
Riduzione diagrammi a blocchi: terzo esempio

- Schema di partenza:



Riduzione diagrammi a blocchi: terzo esempio - 1

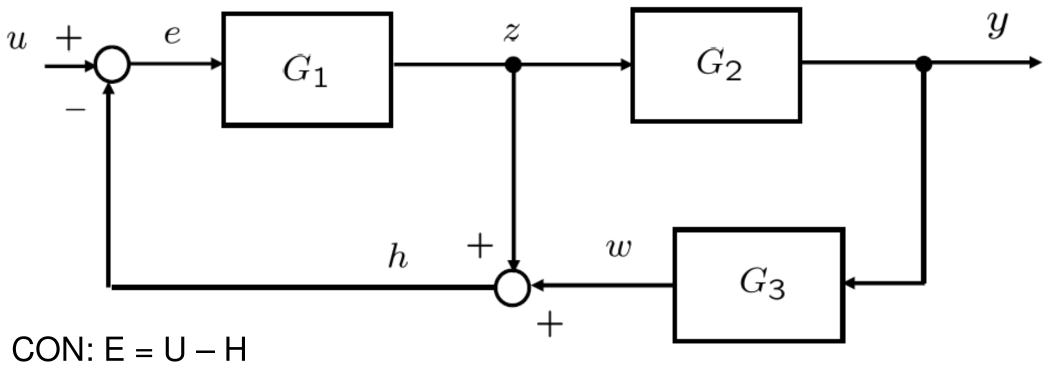
- Si noti che con lo spostamento effettuato il diagramma contiene un unico anello di retroazione da ridurre, contenente G_1, G_2 e il sotto-sistema evidenziato:



- $$G_{c.l.}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 [G_3 + \frac{1}{G_2}]}$$

Riduzione diagrammi a blocchi: terzo esempio - 2

- Una **procedura alternativa** per il calcolo della funzione di trasferimento complessiva è quella di denominare in modo conveniente tutti i rami di segnale del diagramma ed esprimerne le interdipendenze:



CON: $E = U - H$
$Z = G_1 E$
$Y = G_2 Z$
$H = Z + W$
$W = G_3 Y$

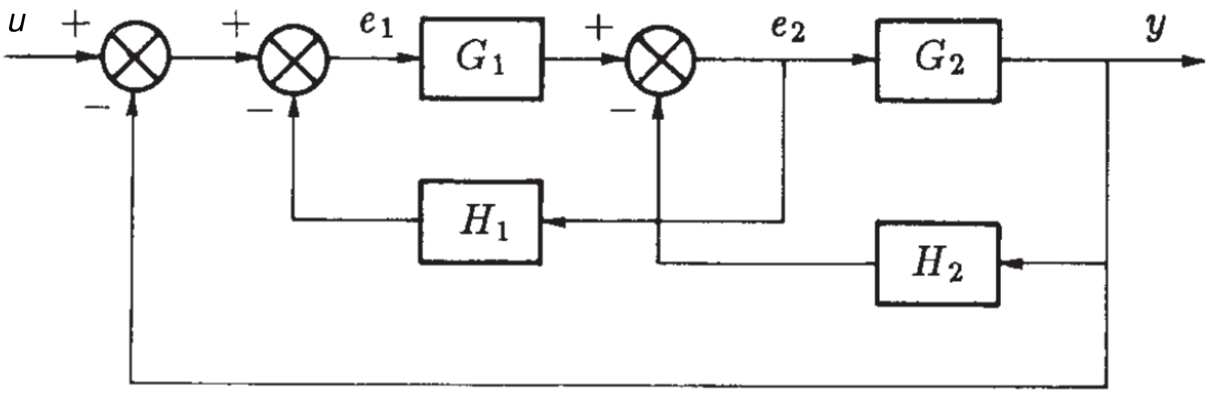
Riduzione diagrammi a blocchi: terzo esempio - 3

- Si può quindi procedere come segue:

$$
\begin{aligned}
 & E &= U - Z - W = U - G_1 E - G_3 Y \\
\Rightarrow \quad & E(1+G_1) &= U - G_3 Y \\
\Rightarrow \quad & E &= \tfrac{1}{1+G_1}(U - G_3 Y) \\
\Rightarrow \quad & Y &= \tfrac{G_1 G_2}{1+G_1}(U - G_3 Y) \\
\Rightarrow \quad & Y &= \tfrac{G_1 G_2}{1+G_1+G_1 G_2 G_3} U
\end{aligned}
$$

Riduzione diagrammi a blocchi: quarto esempio

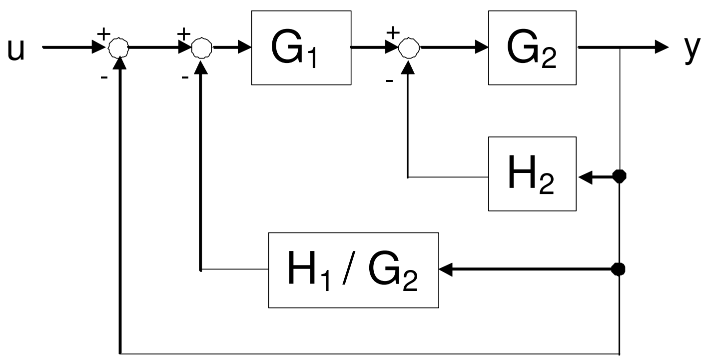
- Schema di partenza:



- E' necessario spostare la diramazione del segnale e_2 per poter ridurre gli anelli presenti nello schema

Riduzione diagrammi a blocchi: quarto esempio - 1

- Lo schema di partenza è quindi equivalente a:

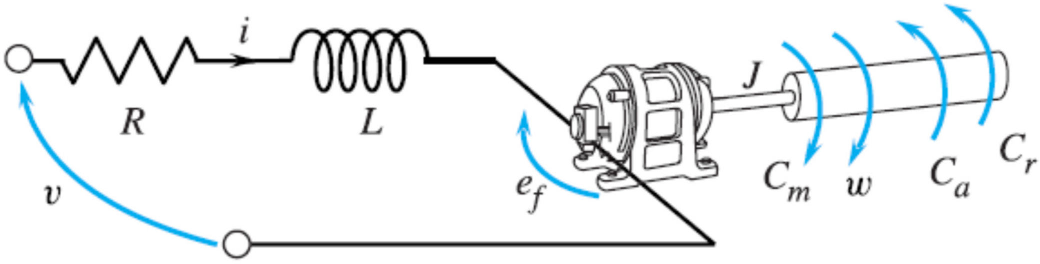


che contiene **DUE** anelli (il blocco H_1 / G_2 è in parallelo con un ramo a guadagno unitario):

$$G_{c.l.}(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2}$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici

- Motore a corrente continua:



$$v(t) - k_m\omega(t) = Ri(t) + L\,di/dt$$

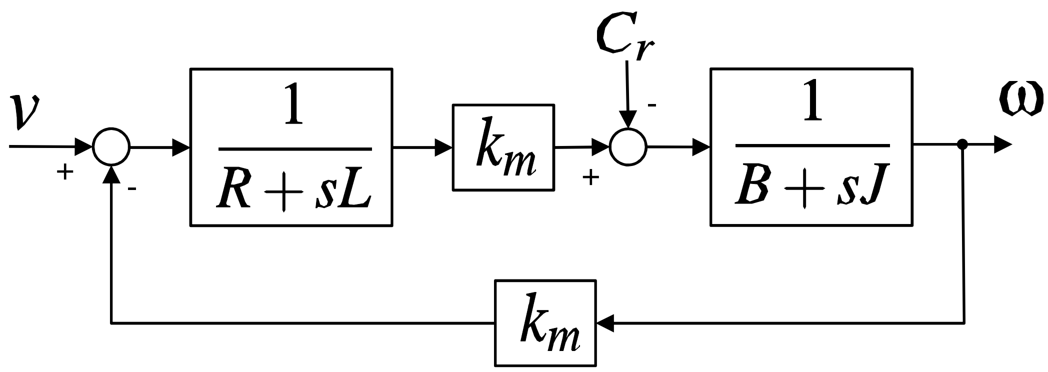
$$k_m i(t) - C_r(t) = B\omega(t) + J\dot{\omega}(t)$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-1

- Applicando le trasformate di Laplace:

$$V(s) - k_m\Omega(s) = (R+sL)I(s)$$

$$k_m I(s) - C_r(s) = (B+sJ)\Omega(s)$$



Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-2

- Risulta quindi:

$$\Omega(s) = G_1(s)V(s) + G_2(s)C_r(s)$$

$$G_1(s) = \frac{k_m}{(R+sL)(B+sJ)+k_m^2}$$

$$G_2(s) = \frac{-(R+sL)}{(R+sL)(B+sJ)+k_m^2}$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-3

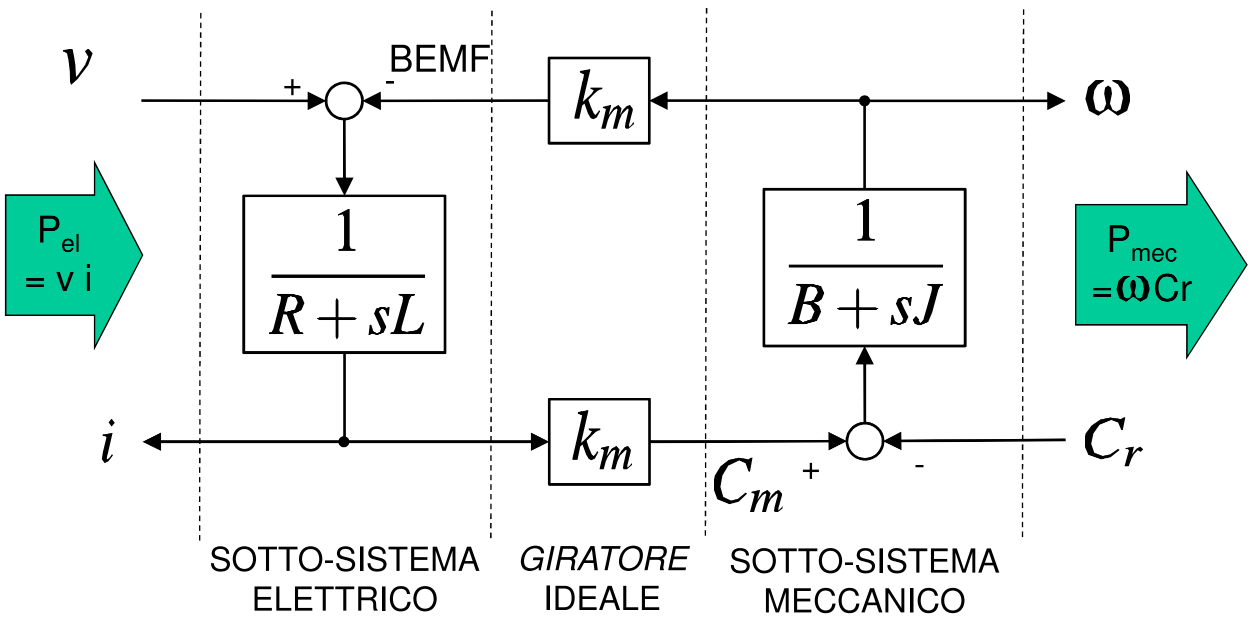
- Si noti che il diagramma a blocchi che descrive il modello dinamico del motore a corrente continua **contiene intrinsecamente una retroazione**
- Tale feedback è presente nel sistema fisico per effetto dell'accoppiamento elettromagnetico (bidirezionale)
- Non si è considerato alcun aspetto di controllo!
- Tale retroazione rende il comportamento del sistema **stabile per natura**: si può facilmente osservare che (in condizioni di coppia resistente costante) applicando una tensione costante al motore esso ruoterà, dopo un transitorio di avvio, ad una velocità costante

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-4

- Si noti anche che la funzione di trasferimento ottenuta per il motore a corrente continua è ancora determinata dalla **sovrapposizione di due effetti**:
  1. $G_1(s)$ = FdT tra tensione applicata e velocità di rotazione
  2. $G_2(s)$ = FdT tra coppia di carico e velocità di rotazione
- Per maggiore precisione, occorre notare che il sistema considerato ha una seconda uscita, normalmente di interesse: la *corrente elettrica*..

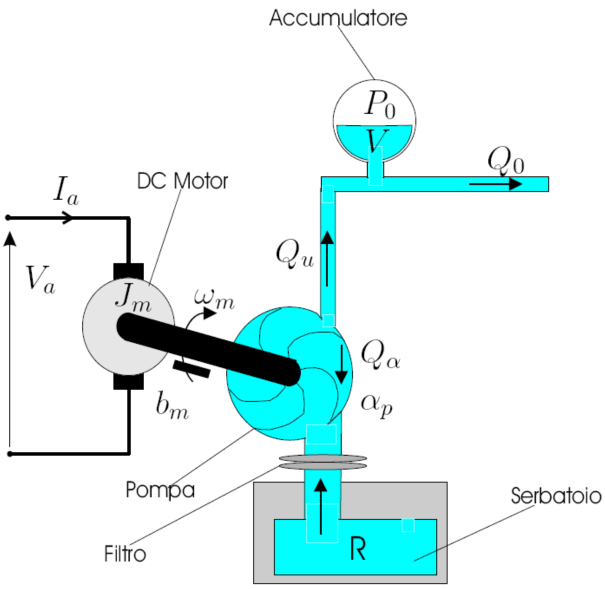
Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-5

- Ristrutturando il diagramma a blocchi:



Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-6

- La struttura precedente, *orientata alla potenza*, è applicabile a molti tipi di sistemi fisici *multi-dominio*
- Es. motore a c.c. che trascina una pompa idraulica:

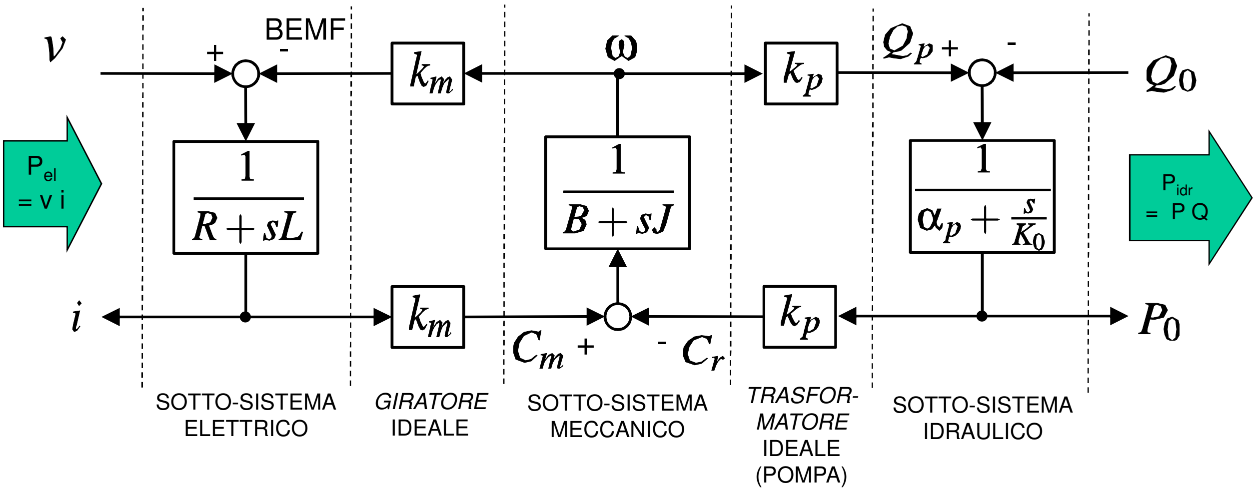


Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-7

- La pompa trasforma la velocità del motore in portata fluidica Q_p e la pressione dell'accumulatore P_0 in coppia resistente al motore, secondo la cilindrata k_p:
  - $Q_p = k_p\, \omega$
  - $P_0 = (1/k_p)\, C_r$ (C_r coppia di carico per il motore a c.c.)
- La resistenza fluidica riduce la portata utile di una quantità
  - $Q_\alpha = \alpha_p P_0 \;\rightarrow\; Q_u = Q_p - Q_\alpha$
- La pressione nell'accumulatore aumenta in base al volume di fluido accumulato (integrale della differenza tra portata entrante e portata uscente):
  - $s\, P_0 = K_0\, (Q_u - Q_0)$

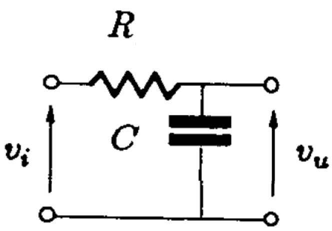
Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-8

- Il modello completo del gruppo motore elettrico + pompa idraulica + accumulatore idraulico estende quindi quello visto in precedenza per il solo motore DC, con un sotto-sistema analogo a quelli elettrico e meccanico:

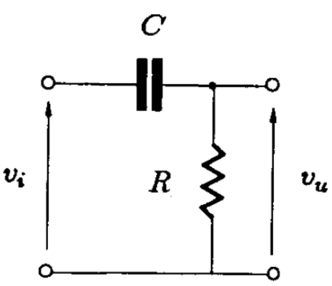


Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-9

- Circuiti elettrici *passivi*:



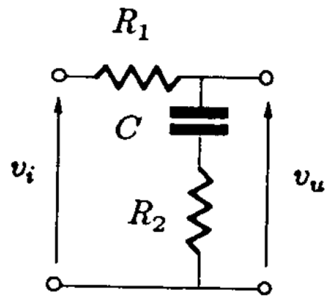
$$G(s)=\frac{V_u(s)}{V_i(s)}=\frac{1}{sRC+1}$$



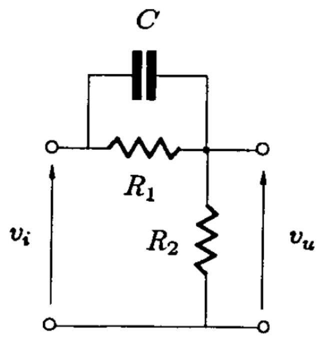
$$G(s)=\frac{V_u(s)}{V_i(s)}=\frac{sRC}{sRC+1}$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-10

- Circuiti elettrici *passivi*:



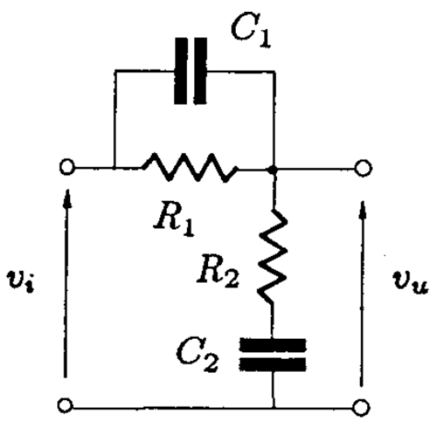
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{sR_2C+1}{s(R_1+R_2)C+1}$$



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{R_2(sR_1C+1)}{sR_1R_2C+R_1+R_2}$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-11

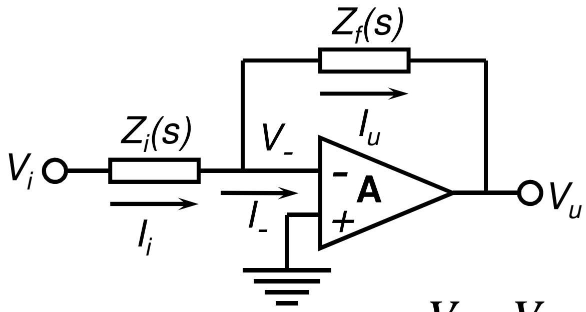
- Circuiti elettrici *passivi*:



$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{sC_2}+R_2}{\frac{1}{sC_1+(1/R_1)}+\frac{1}{sC_2}+R_2}$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-12

- Circuiti elettronici *attivi* con amplificatori operazionali:



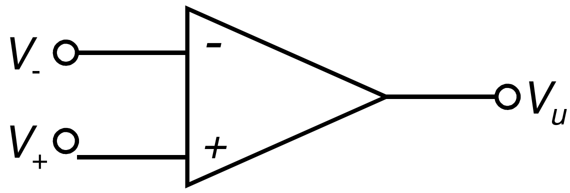
- Idealmente I_-=0, perciò $I_i = I_u$ ➔ $\dfrac{V_i - V_-}{Z_i} = \dfrac{V_- - V_u}{Z_f}$

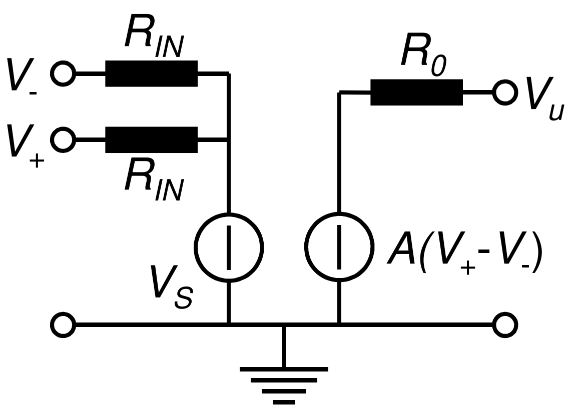
$$V_-(s) = B(s)V_i(s) + H(s)V_u(s)$$

$$B(s) = \frac{Z_f(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)}; \quad H(s) = \frac{Z_i(s)}{Z_i(s)+Z_f(s)};$$

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-13

- Ipotizzando che l'amplificatore operazionale abbia circuito equivalente:



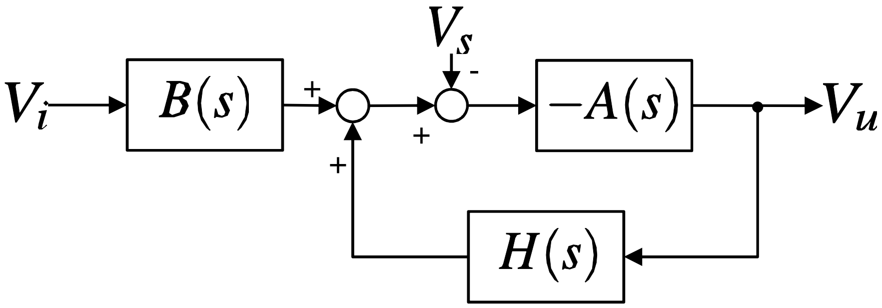


R_{IN} → infinito

R_0 → 0

Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-14

- Il diagramma a blocchi che descrive il circuito è del tipo:



Con V_s = tensione di *offset* dell'amplificatore

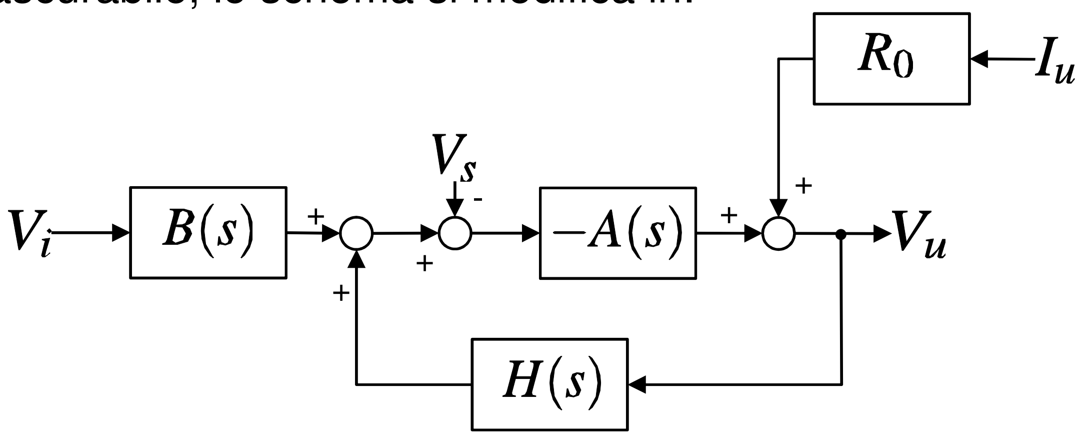
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{-A(s)B(s)}{1+A(s)H(s)} = -\frac{B(s)}{H(s)+\frac{1}{A(s)}}$$

- Se A(s) è molto elevata fino ad un certo valore di s:

$$G(s) \simeq -\frac{B(s)}{H(s)} = -\frac{Z_f(s)}{Z_i(s)}$$

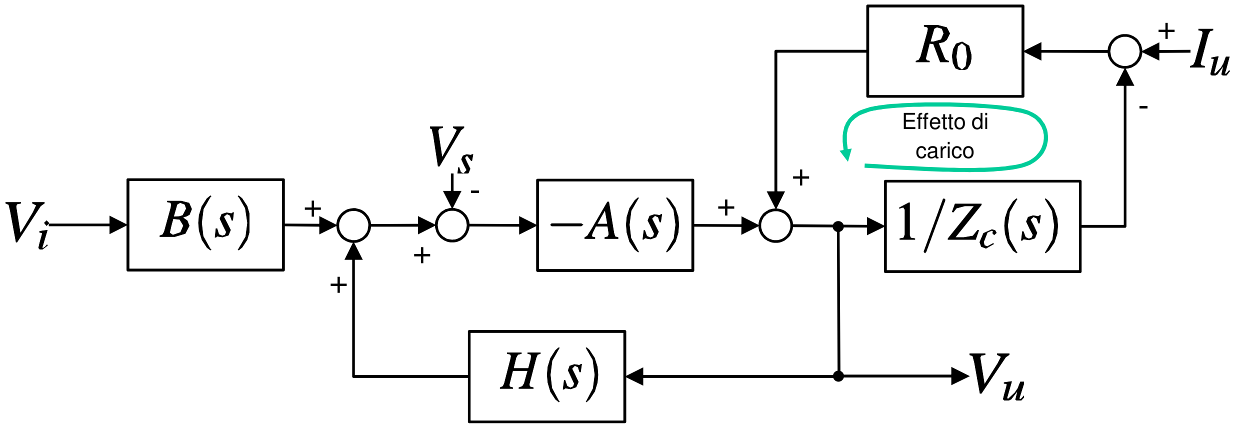
Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-15

N.B.: Per applicazioni di precisione o per valori di s tali per cui l'ipotesi su A(s) non sia valida, la funzione di trasferimento va considerata in modo non approssimato. Inoltre, qualora la resistenza di uscita R_0 non sia trascurabile, lo schema si modifica in:



Funzioni di trasferimento per sistemi ingegneristici-16

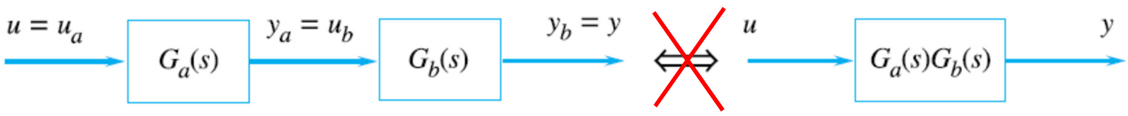
N.B.: INOLTRE se il circuito a valle è caratterizzato da una certa impedenza di ingresso o ***di carico*** (tra V_u e la massa) Z_c, la funzione di trasferimento si modifica ulteriormente:



$$\rightarrow G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{-A(s)B(s)}{1 + A(s)H(s) + \frac{R_0}{Z_c(s)}}$$

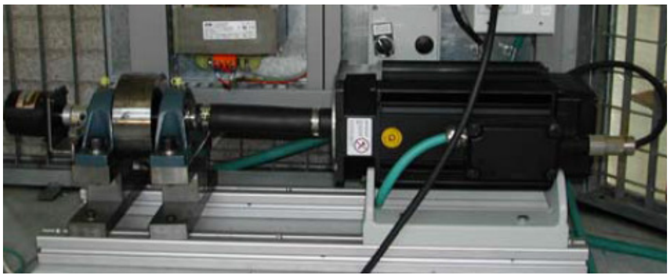
Sistemi ingegneristici ed effetti di carico

- Il caso precedente (amplificatore operazionale con guadagno e resistenza di uscita non ideali) è un tipico esempio di interconnessione influenzata da effetti di carico
- In presenza di questi effetti, non è più valida la regola di riduzione di blocchi in cascata:

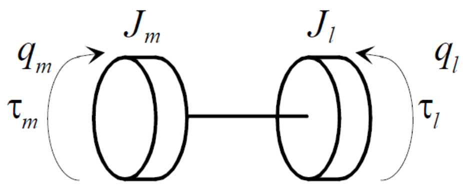


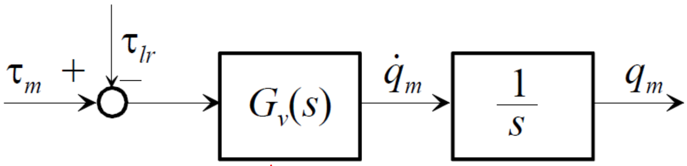
- Altri casi tipici sono i sistemi meccanici connessi con accoppiamento elastico o che interagiscono con un fluido (avente proprietà elastiche e inerziali non trascurabili)

- Accoppiamento motore elettrico / carico:



Ipotesi 1: accoppiamento rigido

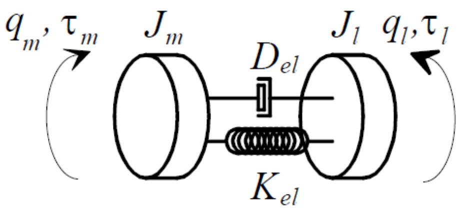




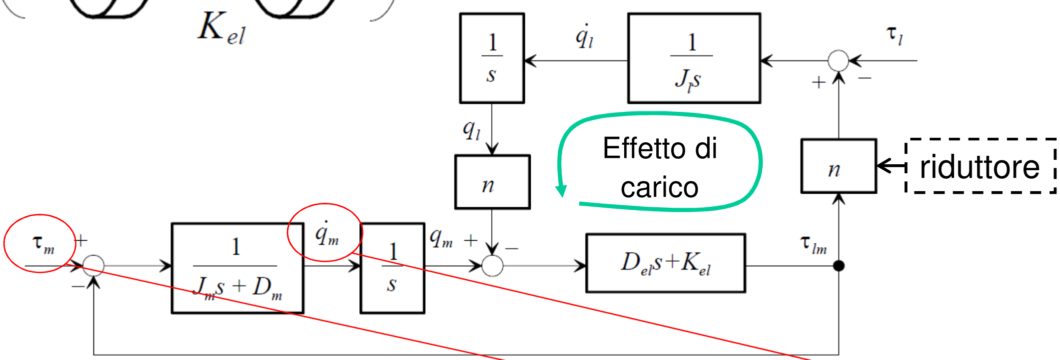
$$G_v(s) = \frac{1}{D_m + s(J_m + J_{lr})}$$

Sistemi ingegneristici ed effetti di carico

- Accoppiamento motore elettrico / carico:



Ipotesi 2: accoppiamento elastico



$$G_{vm}(s) = \frac{J_{lr}s^2 + D_{el}s + K_{el}}{J_{lr}J_m s^3 + (JD_{el} + J_{lr}D_m)s^2 + (JK_{el} + D_m D_{el})s + D_m K_{el}} = \frac{\dot{q}_m}{\tau_m}$$

FUNZIONI DI TRASFERIMENTO
- Trasformate di Laplace
- Modelli ingresso-uscita
- Realizzazioni canoniche
- Diagrammi a blocchi (e sistemi ingegneristici)

FINE