Travi su suolo elastico

Da Lancillotta, Zanichelli , 1987, pag. 494

Le fondazioni sono elementi strutturali che hanno il compito di trasferire i carichi al terreno.

Poichè la resistenza dei terreni sciolti µe sensibilmente inferiore a quella dei materiali costituenti la struttura, l'area di impronta delle fondazioni risulta superiore a quella dei pilastri o delle pareti portanti. Inoltre, la necessitµa di contenere le deformazioni della struttura richiede che le fondazioni siano elementi rigidi. Ne consegue che si tratta, in generale, di elementi tridimensionali marcatamente iperstatici, per i quali è particolarmente difficile perseguire un calcolo rigoroso, anche a causa delle incertezze derivanti dall'individuazione della distribuzione delle pressioni di contatto.

Travi su suolo elastico

Da Lancillotta, Zanichelli , 1987, pag. 494

Il tipo di fondazione da adottare -plinto, trave continua, graticcio di travi, platea è determinato dal valore della pressione media ammissibile sul terreno.

Tale valore µe condizionato sia dall'esigenza di avere adeguati margini di sicurezza nei riguardi della pressione di collasso, sia dalla necessità di limitare i cedimenti.

Successivamente, l'analisi dell'interazione tra la struttura ed il terreno porta a definire la rigidezza da assegnare all'elemento strutturale sia per limitare i cedimenti differenziali, sia per resistere alle sollecitazioni indotte dalle azioni ad esso applicate

Plinti su suolo elastico

Da un punto di vista statico, i plinti possono considerarsi delle piastre caricate verso l'alto dalle pressioni di contatto che equilibrano il carico trasmesso dal pilastro.

Un calcolo rigoroso delle sollecitazioni indotte nell'elemento strutturale e' decisamente complesso

- *sia perchè si tratta di un problema tridimensionale*
- *sia per le incertezze riguardanti le pressioni di contatto*

$\Rightarrow$ Si adottano schemi di calcolo semplificati.

Plinti su suolo elastico

Si ricorda che l'esatta distribuzione delle pressioni di contatto dipende sostanziamente dalla rigidezza relativa tra terreno e fondazione nonchè dalla intensità del carico applicato.

Nel caso di una fondazione circolare rigida poggiante su un mezzo elastico, la condizione di cedimento uniforme $\Rightarrow$ una distribuzione di reazioni del terreno che va da un minimo pari a $q_m/2$ sotto l'asse, ad un valore infinito ai bordi.

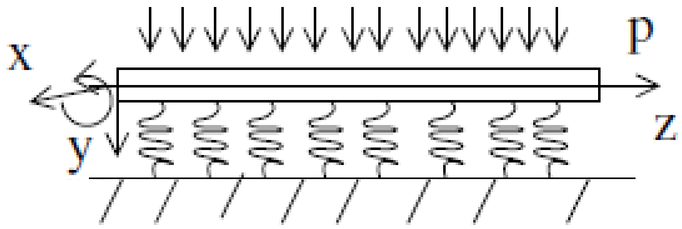
Plinti su suolo elastico

Poiche' il terreno ha una resistenza finita, l'insorgere di zone di plasticizzazione ai bordi della fondazione limita il valore di tali pressioni e ne modifica la distribuzione fino a renderla pressochè uniforme nell'istante in cui il carico applicato eguaglia il valore limite corrispondente alla capacità portante del terreno.

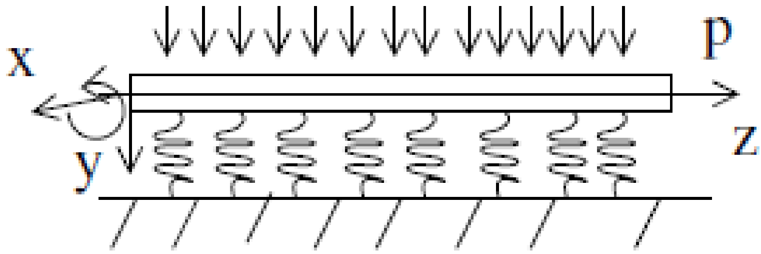
Nel caso di una fondazione poggiante su terreno sabbioso, la condizione di plasticizzazione ai bordi della fondazione viene raggiunta anche per carichi modesti, per cui si ha un andamento parabolico che va da un valore nullo alle estremità ad un valore massimo in corrispondenza del centro.

Travi su suolo elastico

L'analisi del comportamento di una trave di fondazione richiede lo studio dell'interazione tra la trave stessa, la struttura in elevazione ed il terreno sottostante.



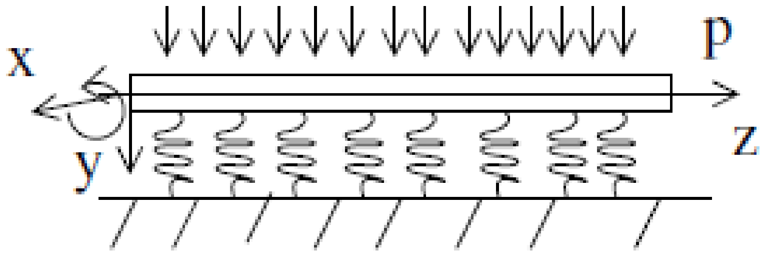
Travi su suolo elastico



Le incognite del problema non sono costituite unicamente dalle reazioni che il terreno trasmette alla trave, bensì anche dalla mutue azioni che la struttura e la trave si scambiano alla base dei piedritti. Se il cedimento del terreno in un punto di ascissa z dovuto ad una forza unitaria R applicata in ζ vale δ, l'abbassamento prodotto da un carico elementare vale

$$dv = \delta(z, \zeta)\, r(\zeta)\, d\zeta \tag{1}$$

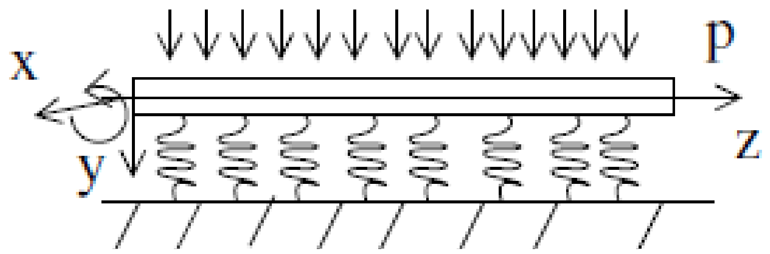
Travi su suolo elastico



e se si considera la reazione estesa all'intera trave, il cedimento in z diventa:

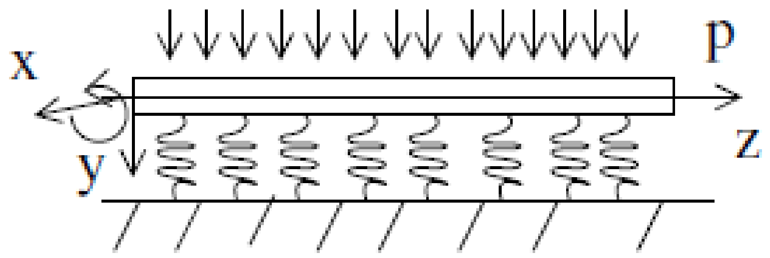
$$v(z) = \int_0^L \delta(z,\zeta)\, r(\zeta)\, d\zeta$$

Travi su suolo elastico



L'ipotesi piu' semplice per quanto concerne la struttura del coefficiente $\delta(z, \zeta)$ e' quella introdotta da Winkler (1867), che vede il suolo come un insieme distribuito di appoggi elastici indipendenti, ognuno caratterizzato da una costante di rigidezza $k(z)$.
E' opportuno ricordare che l'ipotesi di suolo alla Winkler può essere utile nell'analisi della struttura ma non nell'analisi dello stato tensionale del terreno, nel qual caso è opportuno utlizzare il modello alla Boussinesq, che vede il terreno come un semispazio infinito elastico.[1]

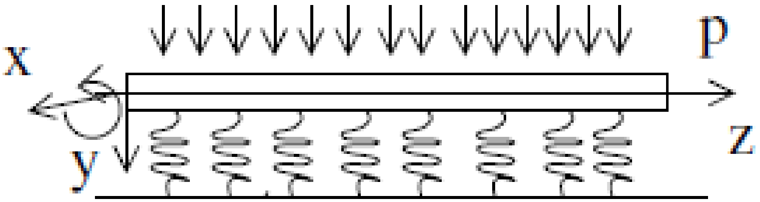
Travi su suolo elastico



L' ipotesi del suolo alla Winkler é basata su un legame costitutivo *locale* $\Rightarrow$ il cedimento $v(z)$ in z dipende unicamente dalla pressione $r(z)$ (Kg/cm^2) agente nello stesso punto z ed è indipendente da eventuali forze applicate in altri punti :

$$v(z) = \frac{r(z)}{k(z)} \qquad (2)$$

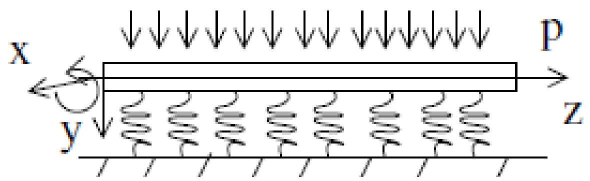
Travi su suolo elastico



La costante k di dimensioni F/ L^3 viene indicata come *il modulo di reazione del terreno o costante di sottofondo del terreno o di Winkler*.

Si osservi che la costante di Winkler ha dimensioni $[Kg/cm^3]$ mentre solitamente, i parametri geotecnici misurati dai tecnici (eg modulo edometrico E) rappresentano la pressione che si deve applicare al terreno per avere un cedimento unitario $[Kg/cm^2]$. Per ottenere la costante di Winkler, esistono formule empiriche, cme quella di Vesic in cui occorre dividere E per il lato minore della base della trave di fondazione.

Travi su suolo elastico



Pertanto, la reazione $r(z)$ del terreno nel punto z ammonta a:

$$\boxed{r(z) = k(z)v(z)},$$

dove $r(z)$ è un carico per unità di superficie $[Kg/cm^2]$. La caratteristica fondamentale del suolo alla Winkler è che gli spostamenti si verificano esclusivamente al di sotto della zona caricata, e ciò rappresenta ovviamente solo una approssimazione.
In seguito useremo una costante k di sottofondo costante

Travi su suolo elastico

Confronto tra suolo alla Winkler e suolo alla Boussinesq per una trave infinitamente rigida ed elastica in condizioni di carico elementari

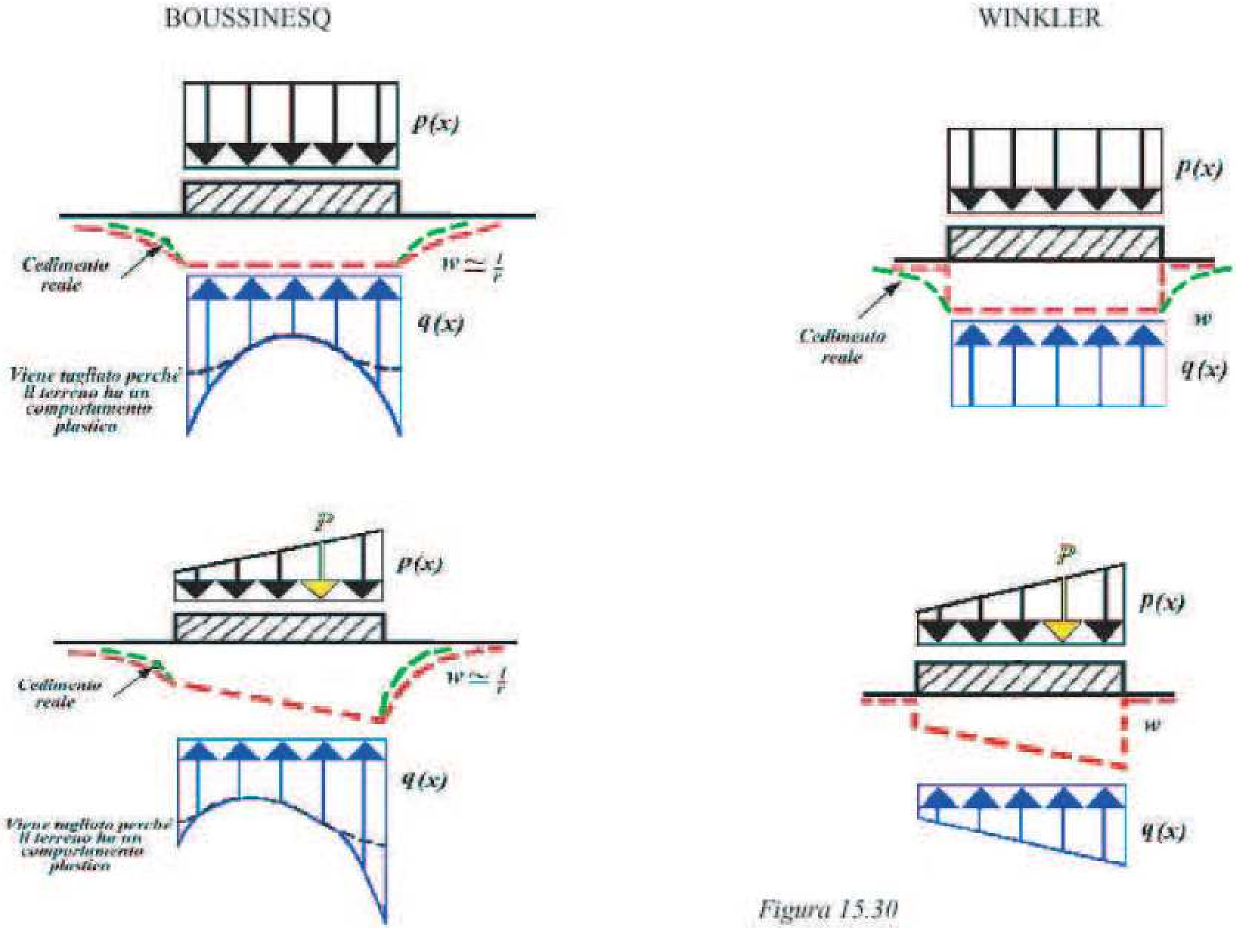
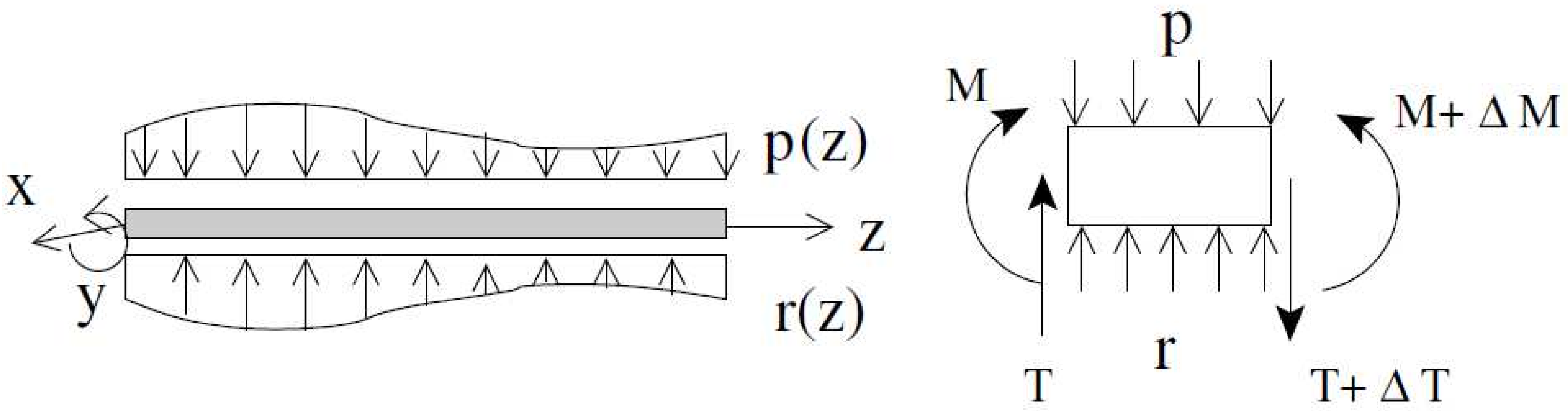


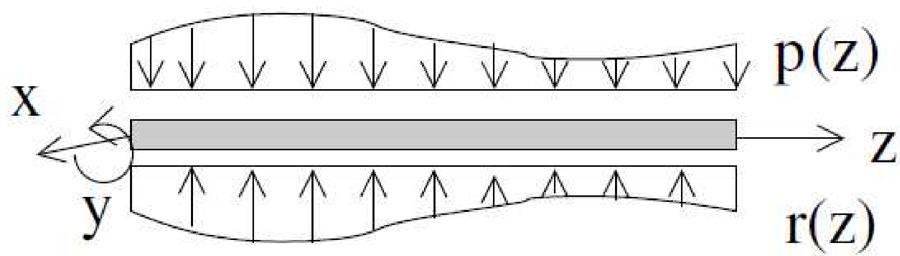
Figura 15.30

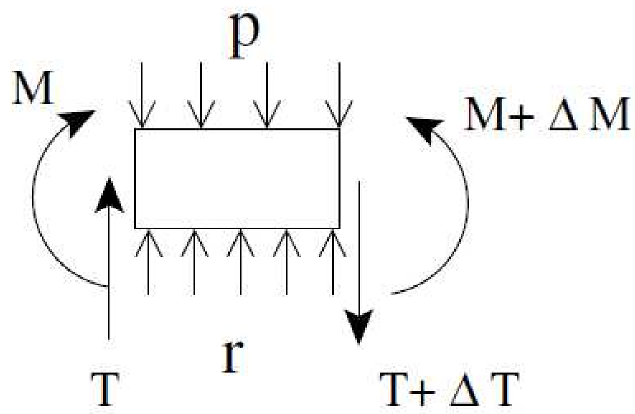
Travi su suolo elastico



Data una trave su suolo elastico caricata con una distribuzione di carico $p(z)$ e da una reazione del terreno $r(z)$, studiamo l'equilibrio di un concio di trave

Travi su suolo elastico





Equazioni indefinite di equilibrio:

$$\frac{dT}{dz} + p - r = 0 \qquad (8)$$

$$-\frac{dM}{dz} + T = 0 \qquad (9)$$

da cui derivando la Eq. (9) e sostituendovi Eq. (8) si ha

$$-\frac{d^2M}{dz^2} = p - r \qquad (10)$$

Travi su suolo elastico

Sostituendo le equazioni costitutive

- suolo: $r(z) = kv(z)$, dove k e' la pressione indotta su un tratto unitario da uno spostamento unitario

- trave: $M(z) = -EJ\dfrac{d^2v}{dv^2}(z)$

Travi su suolo elastico

l'equazione di equilibrio della trave inflessa su suolo elastico

$$\boxed{EJ\frac{d^4v(z)}{dz^4} + kv(z) = p(z)}$$

che si trova anche scritta come

$$\boxed{\frac{d^4v(z)}{dz^4} + 4\alpha^4 v(z) = \frac{p(z)}{EJ}}$$

dove si è posto $\alpha^4 = k/4EJ$

Matrice di rigidezza

l'equazione di equilibrio della trave inflessa su suolo elastico

$$\boxed{EJ\frac{d^4v(z)}{dz^4} + kv(z) = p(z)}$$

che si trova anche scritta come

$$\boxed{\frac{d^4v(z)}{dz^4} + 4\alpha^4 v(z) = \frac{p(z)}{EJ}}$$

dove si è posto $\alpha^4 = k/4EJ$

Matrice di rigidezza

Per ricavare la matrice di rigidezza dell'elemento di trave su suolo elastico basta osservare che l'energia potenziale totale Π della trave e' costituita dalla somma di due termini:

- l'energia di deformazione della trave $\int_0^l \frac{1}{2} EJ(\frac{d^2v}{dz^2})^2\, dz$
- l'energia di deformazione del suolo alla Winkler $\int_0^l \frac{1}{2} kv^2\, dz$

$$
\begin{aligned}
\Pi(v) = \int_0^l \frac{1}{2} EJ(\frac{d^2v}{dz^2})^2 dz + \int_0^l \frac{1}{2} kv^2\, dz - L_e = \\
\frac{1}{2} U^T K U + \frac{1}{2} U^t M U - U^T F = \\
\frac{1}{2} U^T (K + M) U - U^T F
\end{aligned}
$$

Matrice di rigidezza

La matrice di rigidezza di trave su suolo elastico diventa:

$$\hat{K} = K + M \tag{12}$$

dove

$$K = \frac{EJ}{l} \begin{pmatrix} 12/l^2 & & & \\ -6/l & 4 & & \\ -12/l^2 & 6/l & 12/l^2 & \\ -6/l & 2 & 6/l & 4 \end{pmatrix}$$

Matrice delle masse M

Esaminiamo alcuni metodi per approssimare la matrice dei contributi del suolo alla Winkler M

Metodo via elementi finiti in pratica si prende la soluzione v dell'equazione di equilibrio della trave inflessa e non della trave su suolo elastico $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ un errore, percio' la matrice chi si trova e' approssimata

Matrice delle masse M

Si prendono come funzioni di forma i polinomi interpolanti degli elementi finiti trave (hermitiani)

$$v(z) = \sum_{i=1}^{4} \Phi_i(z) U_i$$

dove: $\Phi_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$,
$\Phi_2(\xi) = -l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)$
$\Phi_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3$, $\Phi_4(\xi) = -l(\xi^3 - \xi^2)$

Si ottiene che

$$M = \frac{l}{420} \begin{pmatrix} 156 & -22l & 54 & 13l \\ & 4l^2 & -13l & -3l^2 \\ & & 156 & 22l \\ & & & 4l^2 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Matrice delle masse M

metodo "esatto" Si usa un elemento finito speciale di trave su suolo elastico basato sulla soluzione dell'equazione omogenea associata alla equazione differenziale del quart'ordine di equilibrio

$$\frac{d^4 v}{d z^4} + 4\alpha^4 v(z) = 0 \qquad (14)$$

che ha come integrale generale

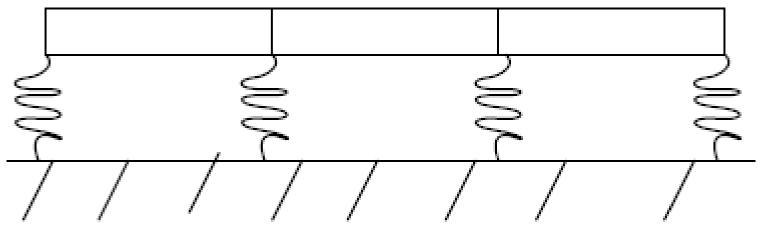
$$v(z) = \frac{p(z)}{k} + C_1 e^{-\alpha z} \sin \alpha z + C_2 e^{-\alpha z} \cos \alpha z +$$
$$C_3 e^{-\alpha(l-z)} \sin \alpha(l-z) + C_4 e^{-\alpha(l-z)} \cos \alpha(l-z)$$

dove si impongono le condizioni al contorno cinematiche *essenziali*

e.g.: $v(0) = v'(0) = v(l) = v'(l) = 0$

Matrice delle masse M

metodo lumped Si suddivide la trave in uno o piu' elementi di trave ordinaria con nodi elasticamente cedevoli (lumped stiffness)



Matrice delle masse M

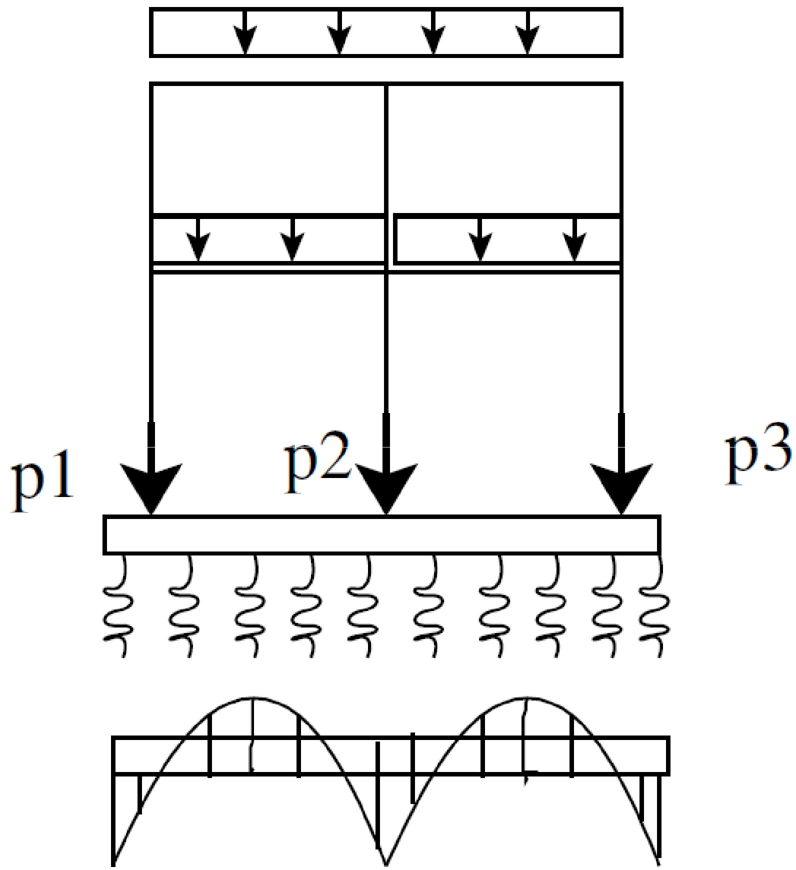


Figure 1: nelle fondazioni, le fibre tese sono sopra e quelle compresse sotto