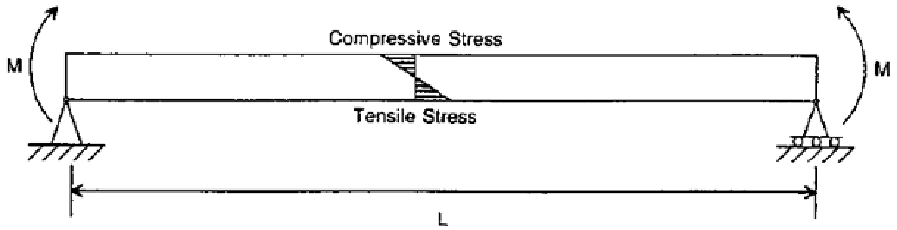
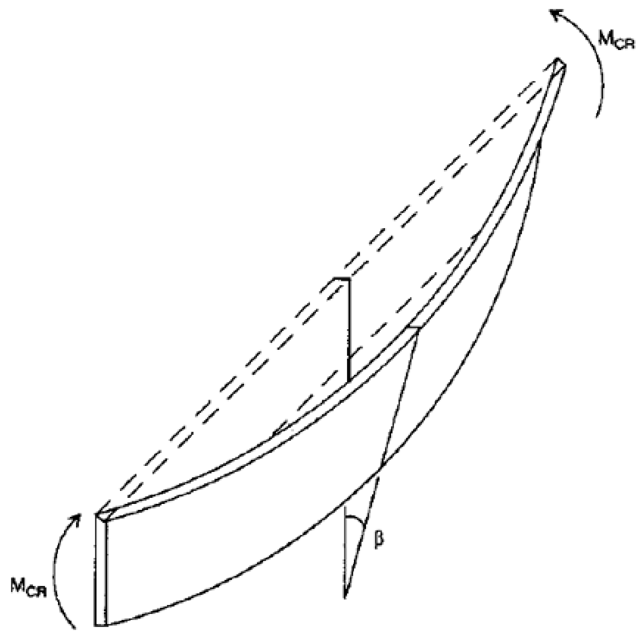
# Stabilità dell’equilibrio elastico: formulazione generale

- Travi soggette a carico di punta
- Instabilità flesso-torsionale
- Instabilità per avvitamento (solo torsionale)
- <u>Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov</u>
- <u>Effetto delle tensioni normali secondarie</u>
- <u>Instabilità di lastre piane</u>
- <u>Altri casi di interesse tecnico</u>

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale



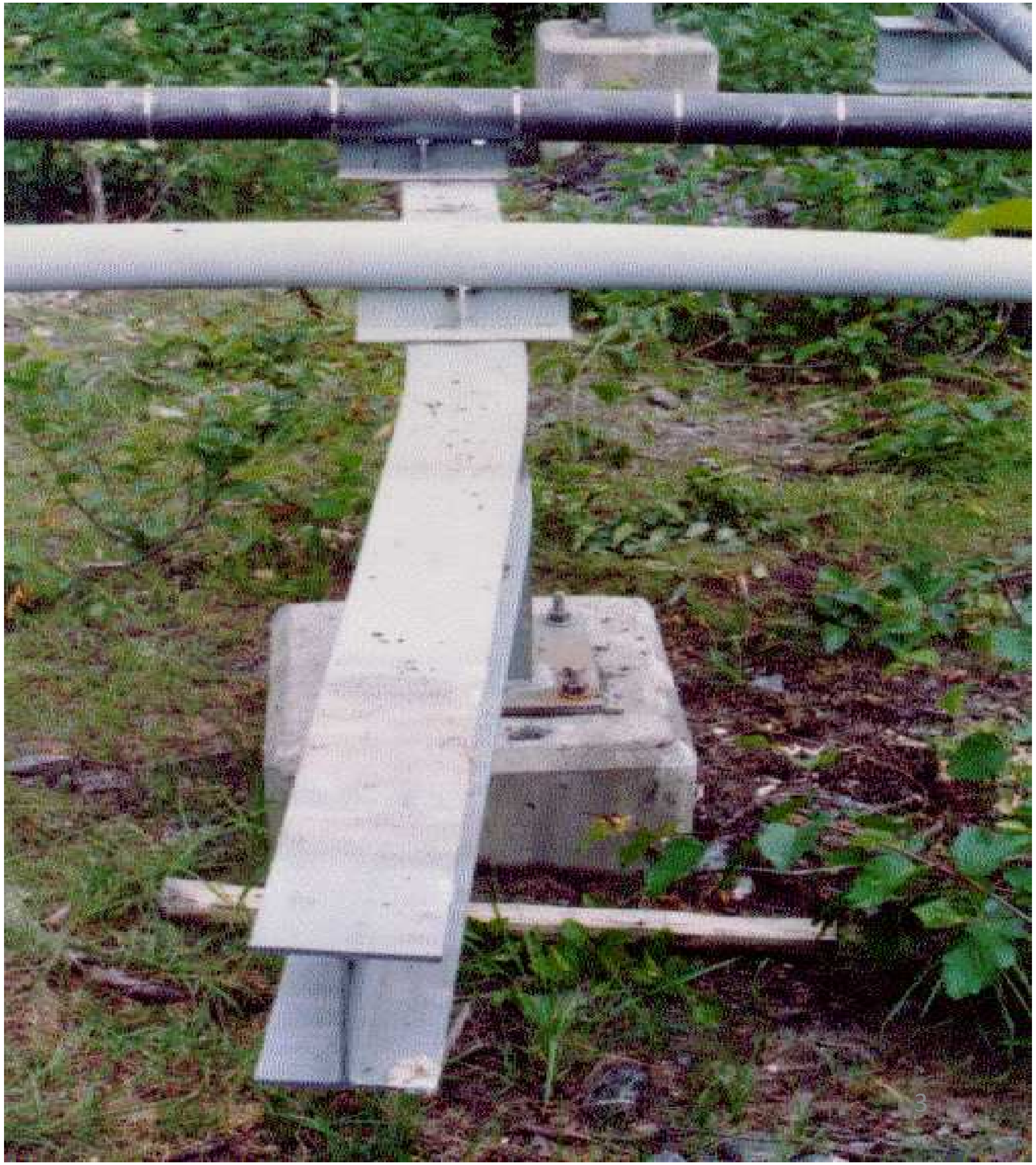

(a)

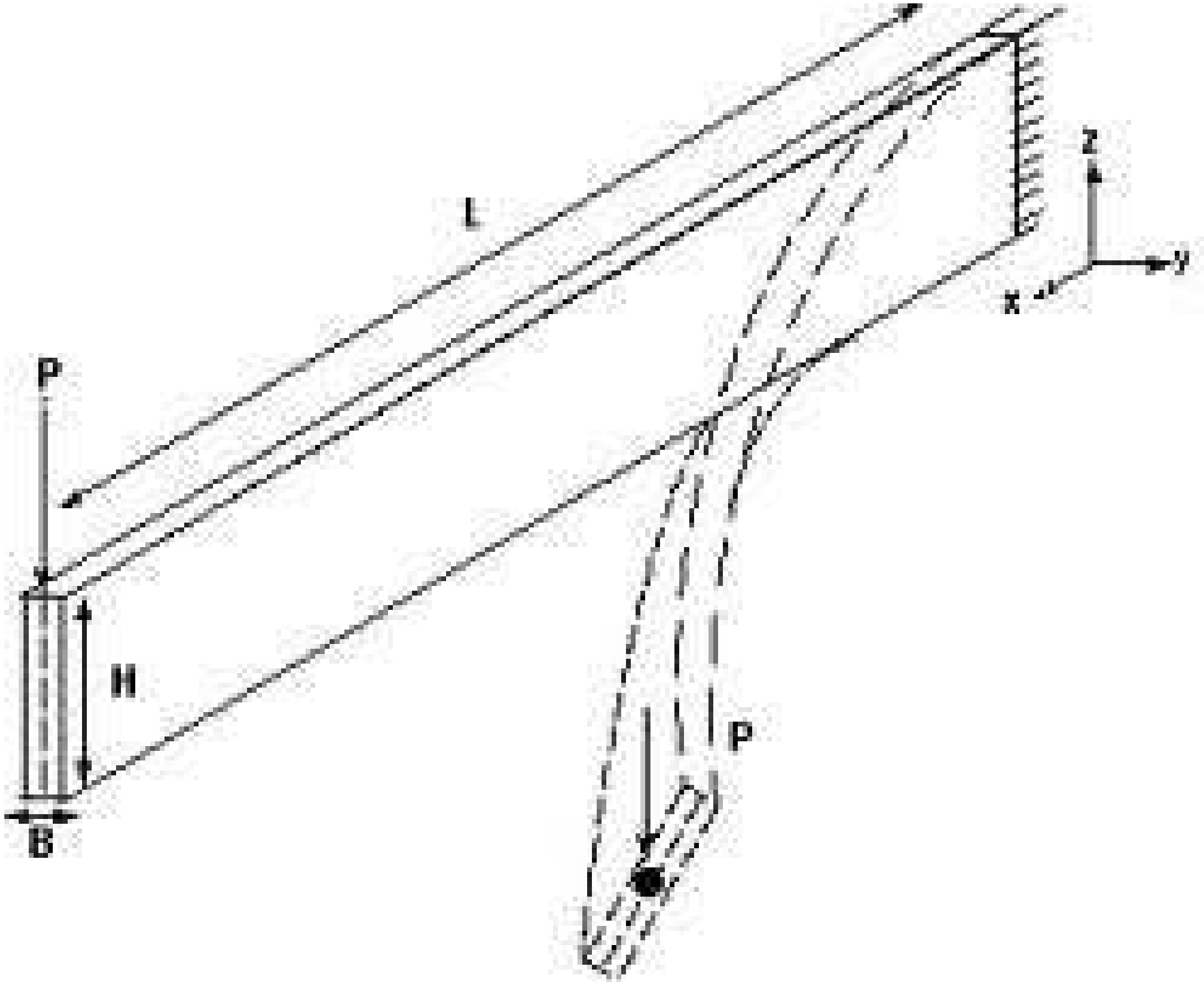



(b)

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

**This cantilever beam has no lateral support. It was excessively loaded and experienced lateral torsional buckling. Part of the failure mechanism included local buckling of the compression flange**



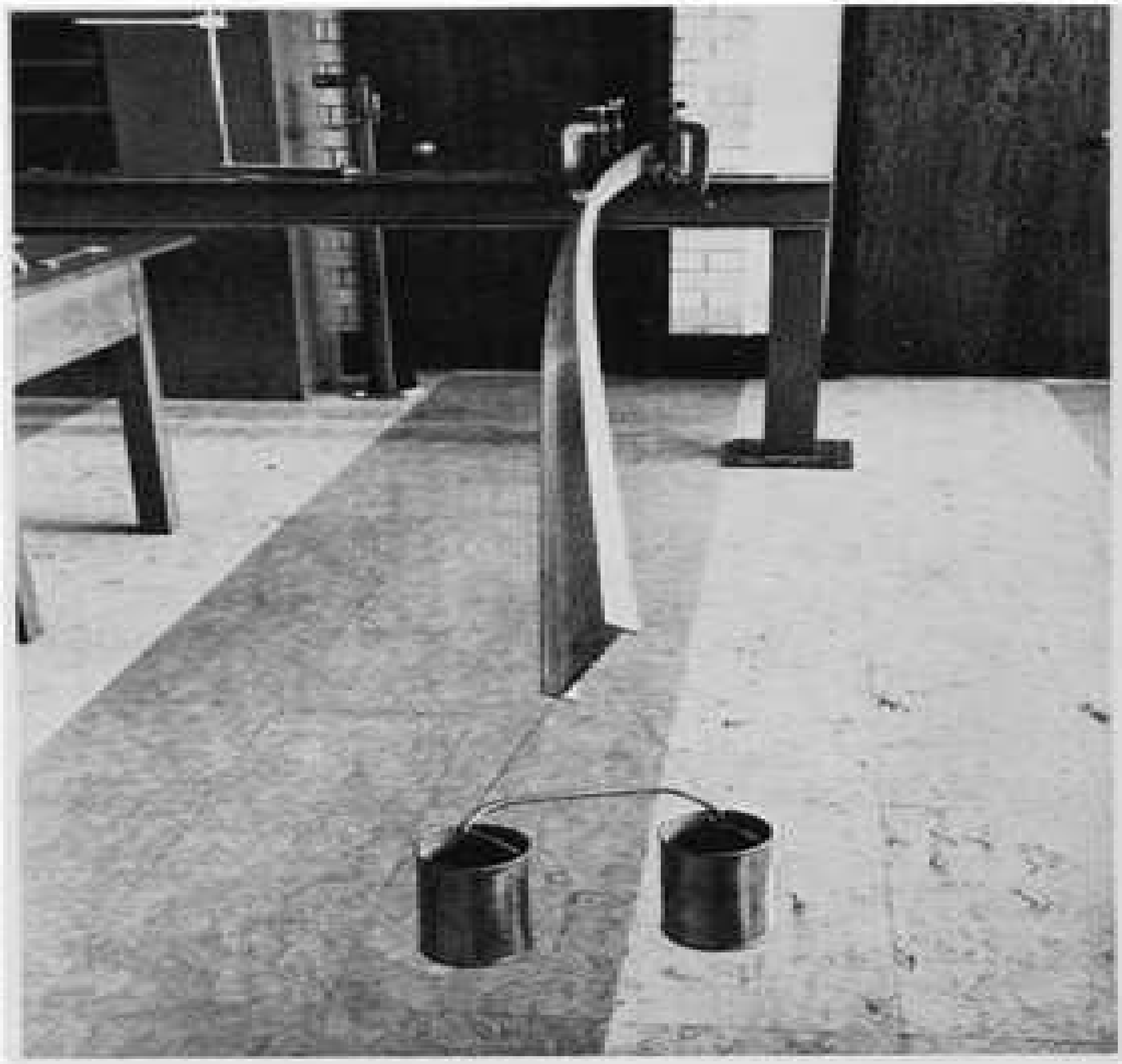

L
P
H
B
P
z
y
x

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

**This set of models demonstrates the behaviour of lateral buckling of a narrow rectangular beam with different sizes of section**

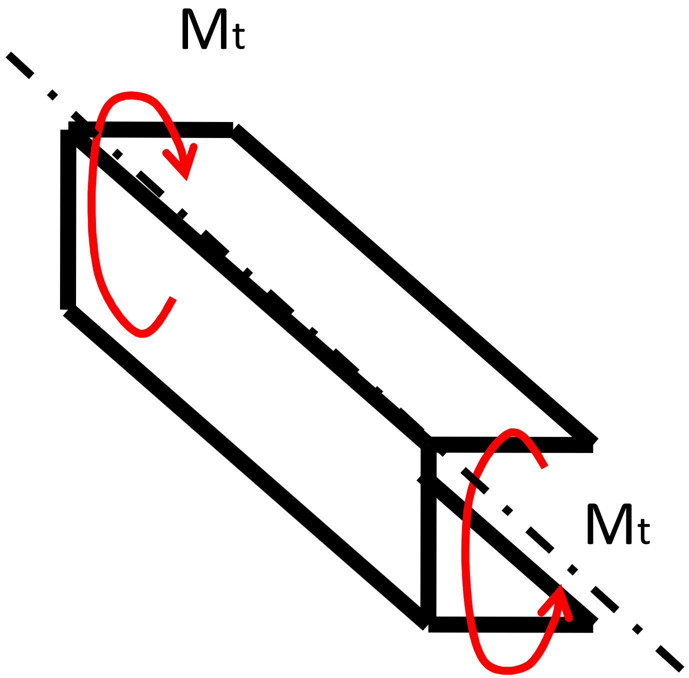
# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

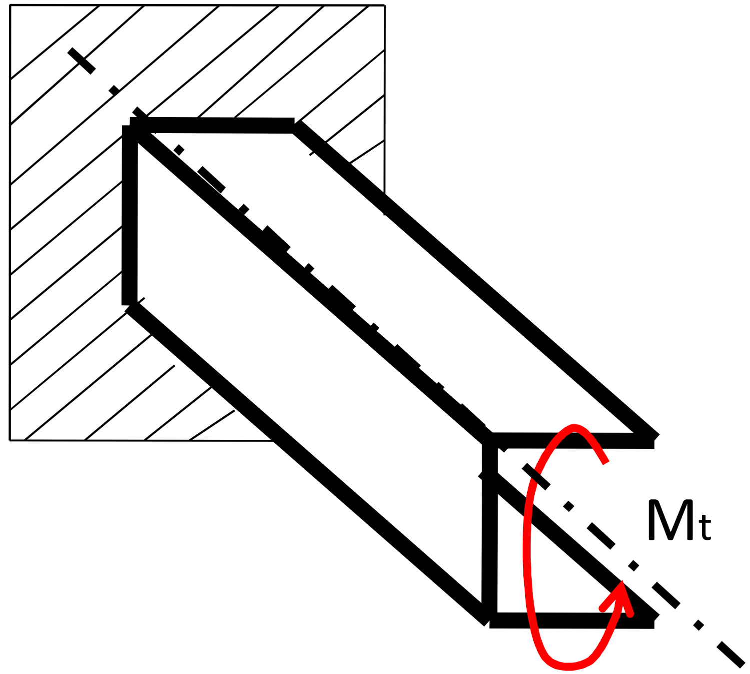


# Esempi di instabilità flesso-torsionale

## Instabilizzazione dei ferri dell’armatura

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov



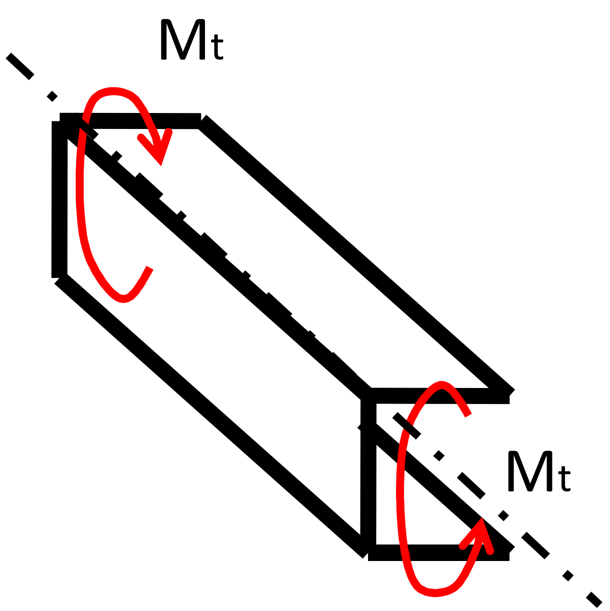




**Ingobbamento: libero** | **impedito**

**Torsione primaria** | **Torsione secondaria**

**Alla Saint Venant** | **alla Vlasov**

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov



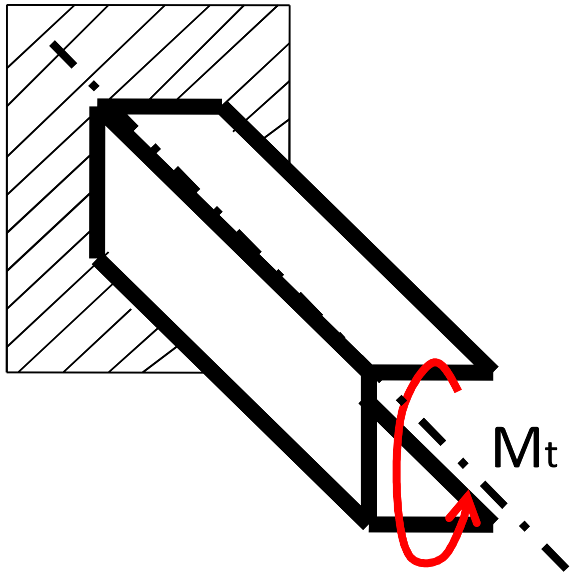

**Angolo unitario di torsione**

$$\theta' = \mathbf{costante}$$

$$\theta' = \frac{\mathbf{M_t}}{\mathbf{GJ_t}} \Rightarrow \theta(\mathbf{z}) = \theta'\mathbf{z} + \theta_0$$

**Ingobbamento costante**

$$w(s) = \theta'\omega(s)$$



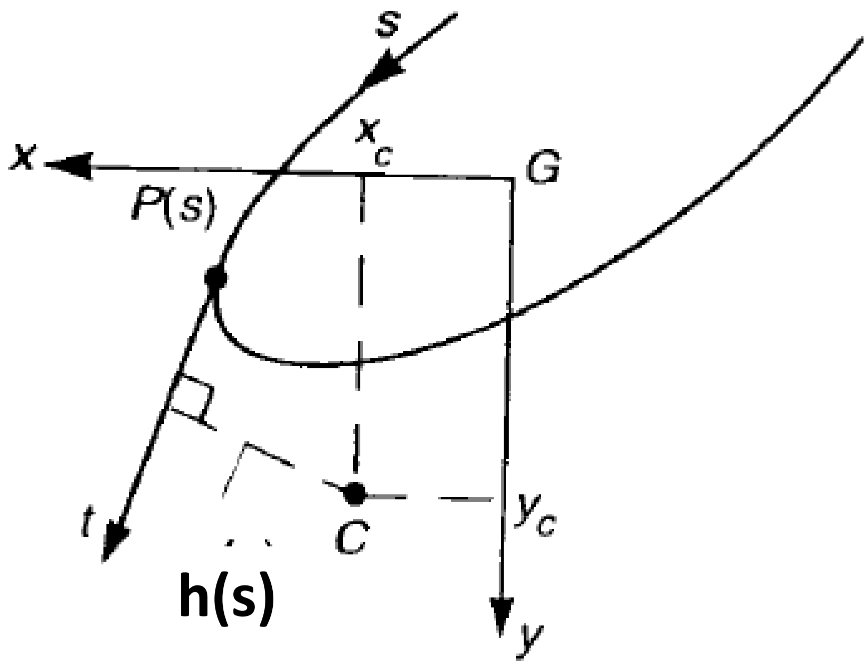

**Angolo unitario di torsione variabile**

$$\theta'(\mathbf{z}) = \frac{\mathbf{M_t(z)}}{\mathbf{GJ_t}} \Rightarrow \mathbf{M_t(z)} = \theta'(\mathbf{z})\mathbf{GJ_t}$$

**Ingobbamento variabile**

$$w(z,s) = \theta'(z)\omega(s)$$

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov



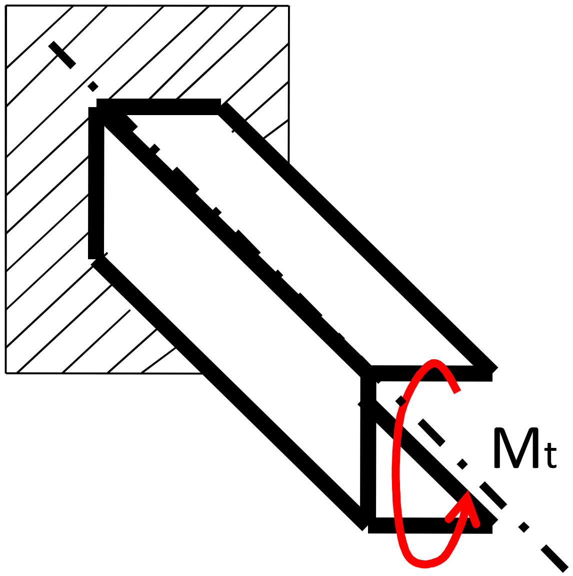

**h(s) è la distanza della tangente alla linea d'asse nel punto corrente dal centro di Taglio C.**
**La funzione di ingobbamento è definita come**

$$\omega(s) = 2(\overline{\Omega} - \Omega(s)) \qquad \Rightarrow d\omega(s) = h(s)ds$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{2}\int_0^s h(t)dt,$$

$$\overline{\Omega}(s) = \frac{1}{A}\int_A \Omega\, dA = \frac{1}{A}\oint b(s)\Omega(s)ds = \frac{1}{2A}\oint b(s)\int_0^s h(t)dtds$$

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov




**Ipotesi cinematiche**

**-indeformabilità sezione trasversale**

**-b<< sviluppo della linea d'asse → ω=ω(s)**

**- dω/ds=-h(s)**

**-Scorrimento $\gamma_{zs}$=0 sulla linea media**

$$\mathbf{w}(\mathbf{z},\mathbf{s}) = \theta'(\mathbf{z})\omega(\mathbf{s})$$

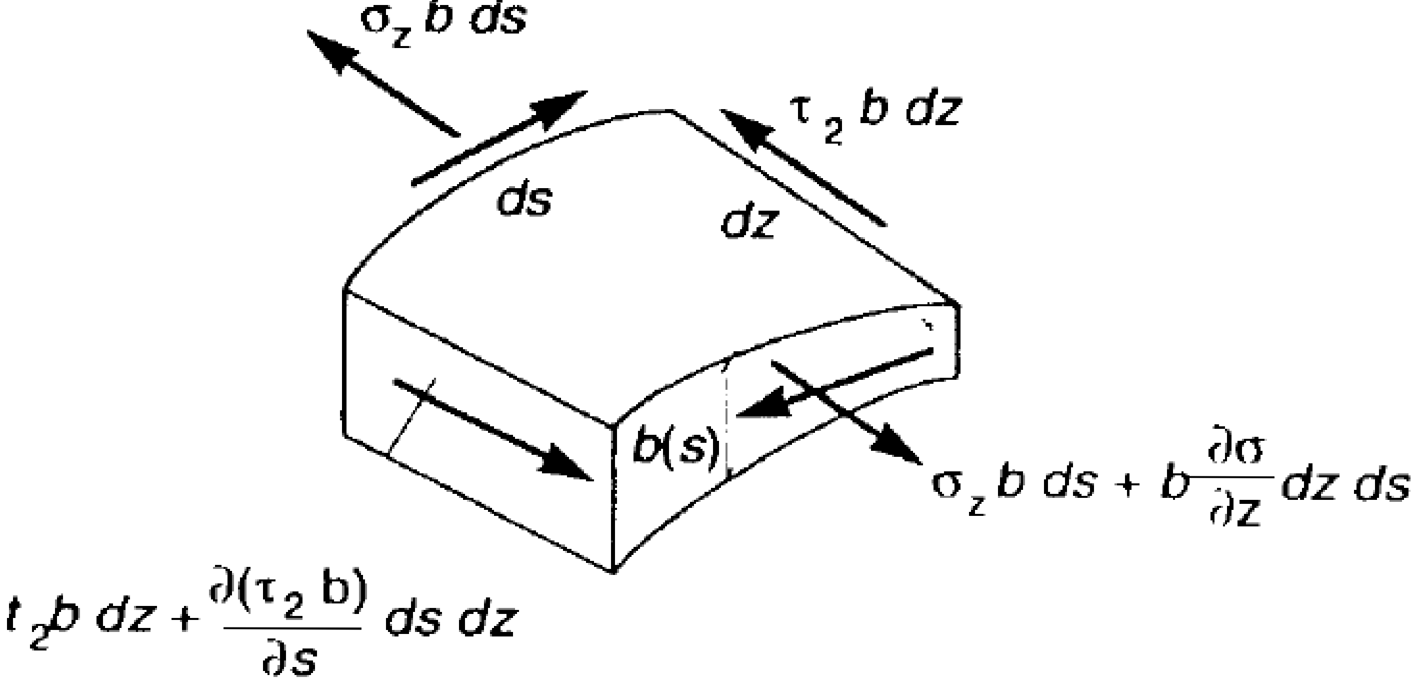
$$\varepsilon_z = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} = \theta''(\mathbf{z})\omega(\mathbf{s}) \Rightarrow \sigma_z = \mathbf{E}\varepsilon_z = \mathbf{E}\theta''(\mathbf{z})\omega(\mathbf{s})$$

$$\Downarrow$$

**Nascono delle tensioni normali a causa dell'ingobbamento impedito**

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

**Consideriamo un elemento infinitesimo di trave.**
**Pensiamo distribuite uniformemente le $\sigma_z$.**
**Le $\sigma_z$ variano lungo z.**
**Per equilibrio nascono delle tensioni tangenziali $\tau_2$ (da torsione secondaria per distinguerle da quella da torsione primaria previste dalla soluzione del Saint Venant)**

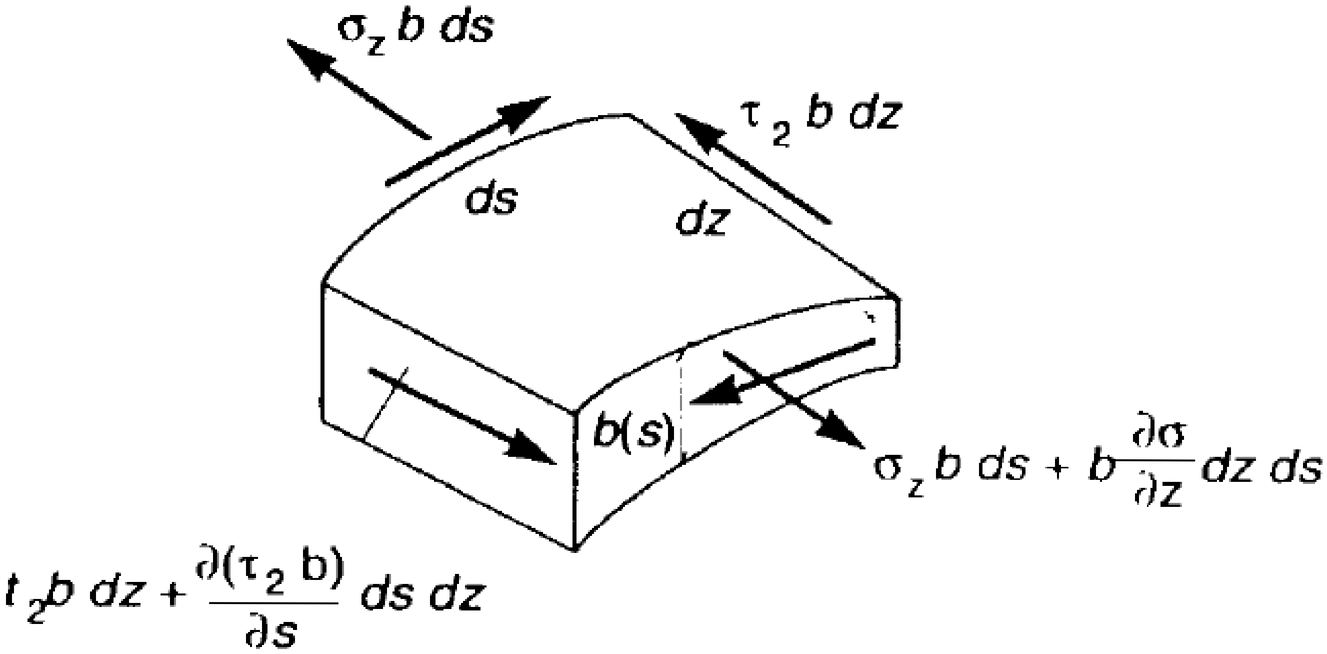


# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

**Equilibrio in z**

$$\frac{\partial(\tau_2 \mathbf{b})}{\partial \mathbf{s}} \mathbf{ds\ dz} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{ds\ dz\ b}$$

$$\frac{\partial(\tau_2 (\mathbf{z},\mathbf{s})\mathbf{b}(\mathbf{s}))}{\partial \mathbf{s}} = -\frac{\partial \sigma_z (\mathbf{z},\mathbf{s})\mathbf{b}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{z}} = -\mathbf{E}\theta'''(\mathbf{z})\omega(\mathbf{s})\mathbf{b}(\mathbf{s})$$



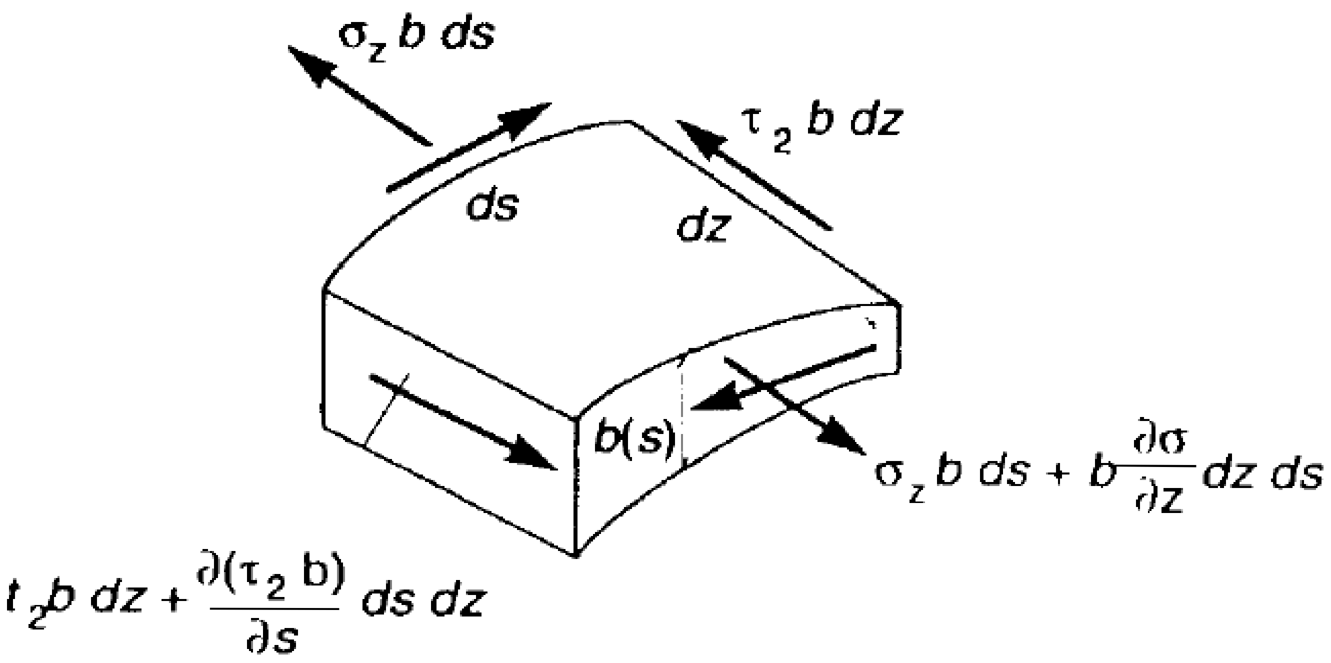
# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

$$\frac{\partial(\tau_2(z,s)b(s))}{\partial s} = -E\theta'''(z)\omega(s)b(s)$$

$$\Rightarrow \tau_2(z,s)b(s) = \int_0^s -E\theta'''(z)\omega(t)b(t)dt$$

**Nasce un momento torcente detto alla Vlasov**

$$M_t^V = \oint \tau_2(z,s).b(s).h(s)ds = -E\theta'''(z)\oint h(s)\int_0^s b(t)\omega(t)dtds$$



# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

**momento torcente detto alla Vlasov**

$$\mathbf{M_t^V = -E\theta'''(z)\oint h(s)\int_0^s b(t)\omega(t)dtds =}$$

$$\mathbf{= -E\theta'''(z)\oint h(s)ds\int_0^s b(t)\omega(t)dt =}$$

$$\mathbf{= -E\theta'''(z)\oint d\omega(s)ds\int_0^s b(t)\omega(t)dt =}$$

$$\mathbf{= E\theta'''(z)\oint b(s)\omega^2(s)ds}$$

**Per dettagli sui passaggi si veda il LC II pag 90-91**

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

**Momento torcente detto alla Vlasov**

$$\mathbf{M_t^V} = \mathbf{E}\theta'''(\mathbf{z})\oint \mathbf{b}(\mathbf{s})\omega^2(\mathbf{s})\mathbf{ds} = \mathbf{E}\theta'''(\mathbf{z})\Gamma$$

$$\Gamma = \oint \omega^2(\mathbf{s})\mathbf{b}(\mathbf{s})\mathbf{ds}$$

**Rigidità all'ingobbamento o momento delle aree Settoriali**
**Proprietà geometrica della sezione**

**Per dettagli sui passaggi si veda il LC II pag 90-91**

# Cenni alla teoria di Timoshenko-Vlasov

**Quindi in totale in caso di vincoli torsionali abbiamo che il momento torcente totale è dato dalla somma di quello alla SV e di quello alla Vlasov**

$$\mathbf{M_t = M_t^{SV} + M_t^{V}}$$

$$\mathbf{M_t^{SV} = \theta' G J_t}$$

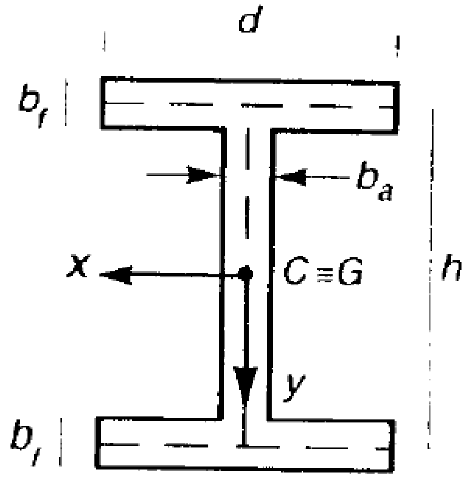
$$\mathbf{M_t^{V} = E\theta'''(z)\Gamma}$$

$$\Gamma = \oint \omega^2 \mathbf{(s) b(s) ds}$$

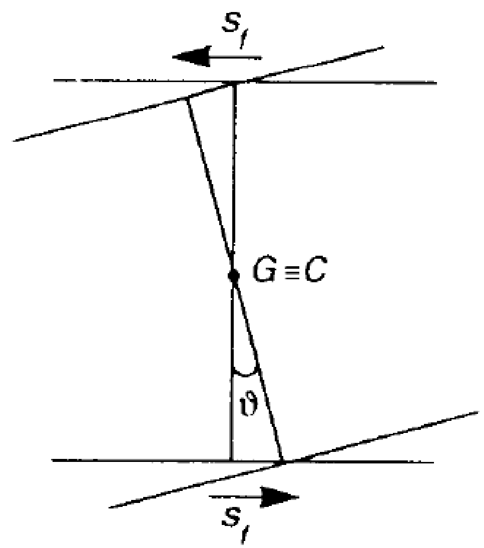
# Applicazione: Il caso della trave ad I

**Timoshenko (1905), LC II pag 91**

**Consideriamo la trave con sezione ad I in figura**




**Supponiamo che la sezione ruoti di un angolo $\theta$**

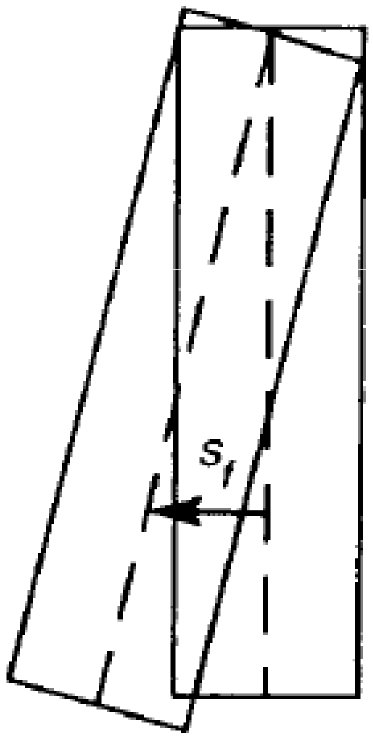



**Allora i punti della sezione subiranno uno spostamento $s_x=\theta y$**

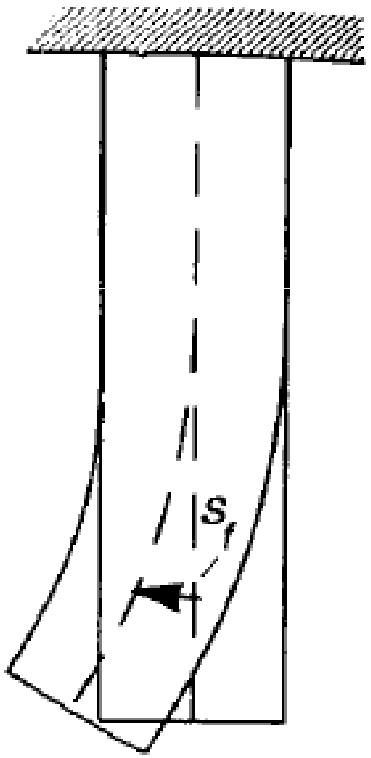
**Ciascuna flangia si sposta di $s_f=\theta h/2$**

# Applicazione: Il caso della trave ad I

**In seguito alla rotazione della sezione la trave si inflette se la rotazione è impedita**



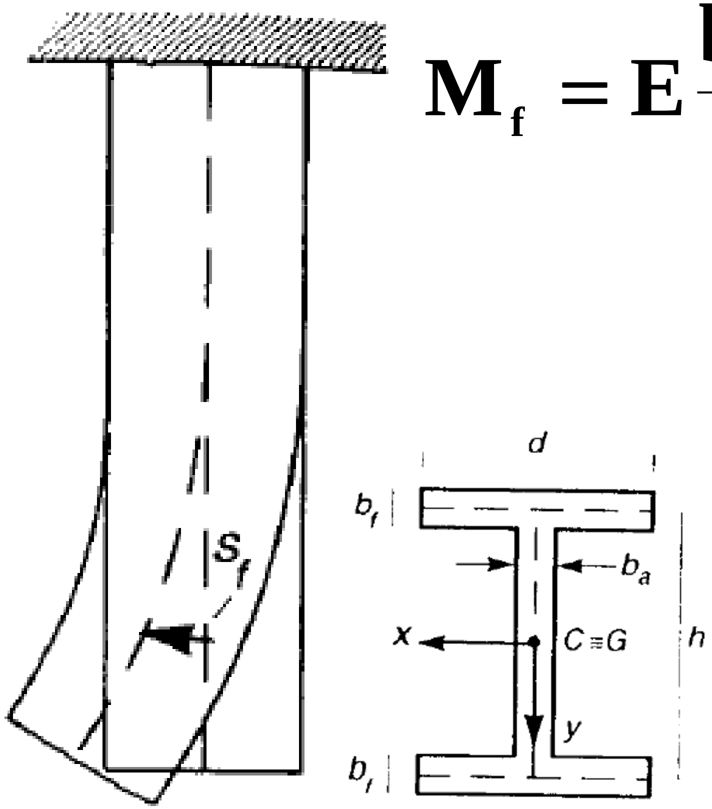

**Rotazione libera**




**Rotazione impedita all’incastro**

# Applicazione: Il caso della trave ad I

**La flangia superiore si inflette come in figura**
**Nasce un momento flettente per effetto della curvatura flessionale indotta dalla rotazione non uniforme**

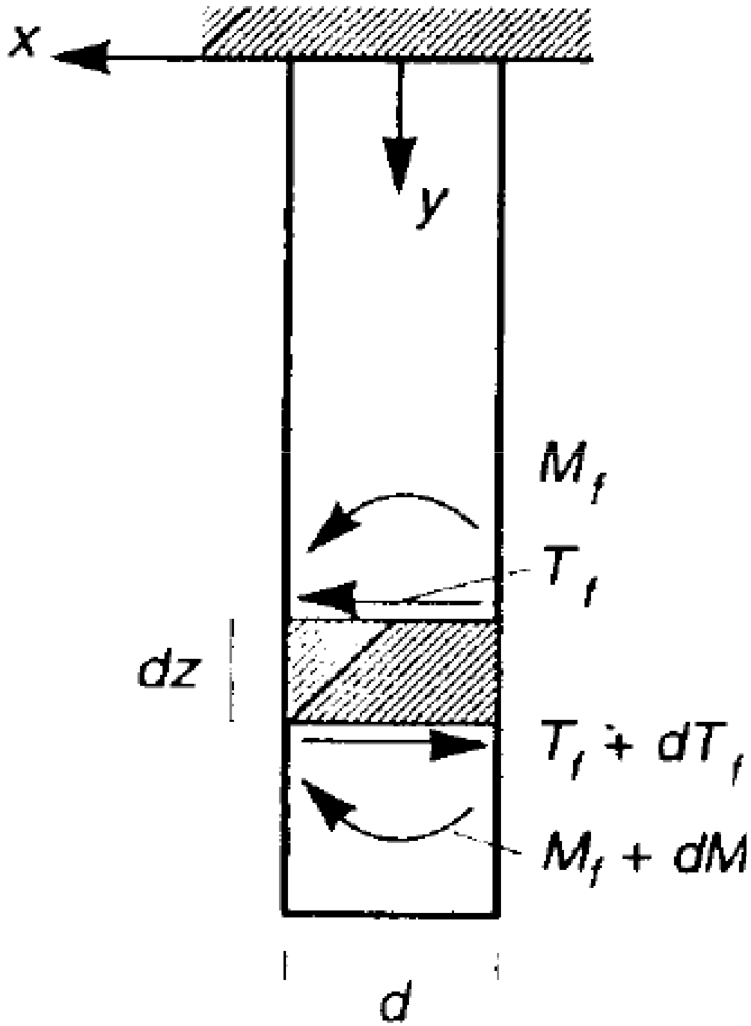


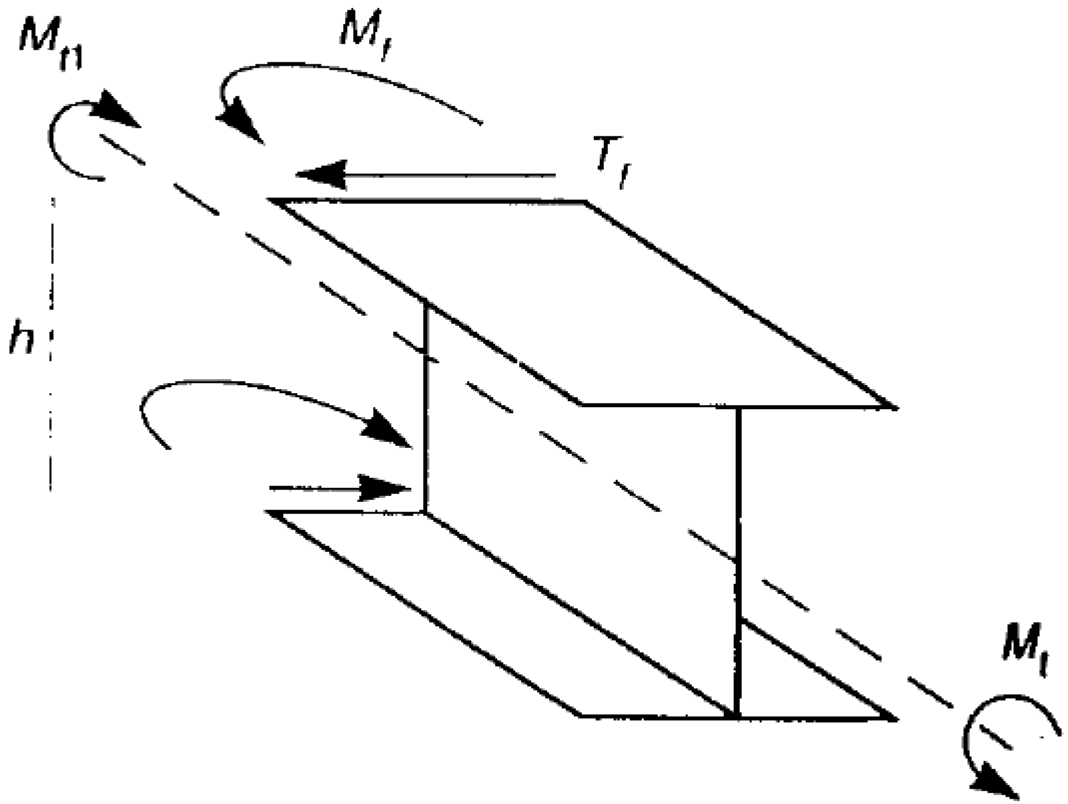

$$\mathbf{M_f} = \mathbf{E}\,\frac{\mathbf{bd}^3}{12}\,\frac{\mathbf{d}^2\mathbf{s_f}}{\mathbf{dz}^2} = \mathbf{E}\,\frac{\mathbf{bd}^3}{12}\,\frac{\mathbf{h}}{2}\,\theta'' = \mathbf{E}\,\frac{\mathbf{bd}^3\mathbf{h}}{24}\,\theta''$$

**Per equilibrio insorgono i Tagli**

$$\mathbf{T_f} = \frac{\mathbf{dM_f}}{\mathbf{dz}} = \mathbf{E}\,\frac{\mathbf{bd}^3\mathbf{h}}{24}\,\theta'''$$

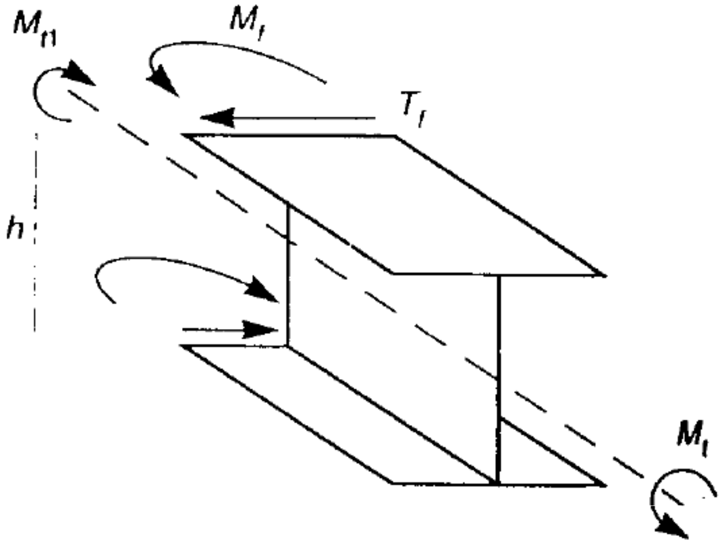
# Applicazione: Il caso della trave ad I




**Nella flangia inferiore si hanno gli stessi risultati a segni invertiti**

# Applicazione: Il caso della trave ad I

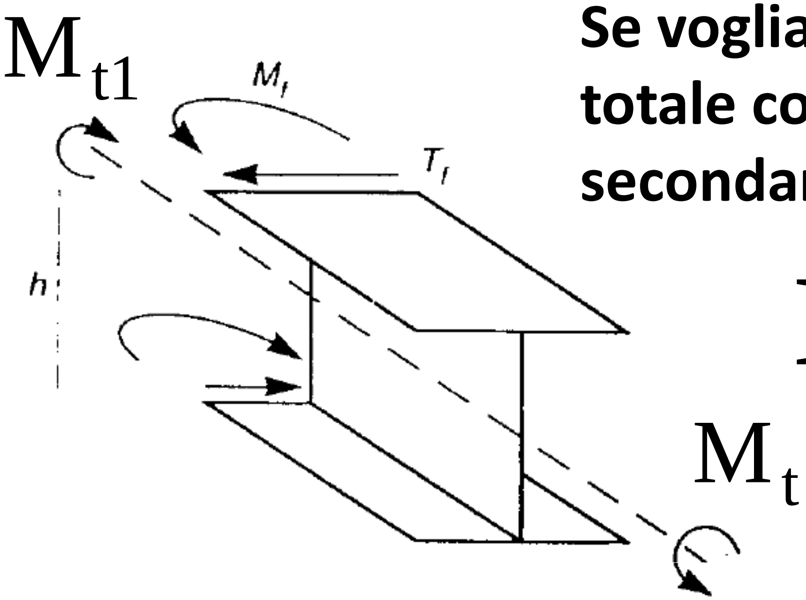



**Equilibrio alla rotazione attorno a z deve tenere conto sia del momento torcente primario alla SV che del momento indotto dalla coppia di braccio h formata dai tagli $T_f$**

$$\mathbf{M_t = M_{t1} - T_f h}$$

**Dove $\mathbf{M_{t1}(z) = GJ\theta'(z)}$ è il contributo alla SV da torsione primaria**

# Applicazione: Il caso della trave ad I




**Se vogliamo scrivere il momento torcente totale come somma del contributo primario e secondario**

$$\mathbf{M_t = M_{t1} + M_{t2}}$$

**Possiamo vedere che il contributo torsionale secondario ottenuto come**

$$\mathbf{M_{t2}(z) = -T_f(z)h = -E\Gamma\theta'''(z)}$$

**Rappresenta il momento alla Vlasov che cercavamo dove**

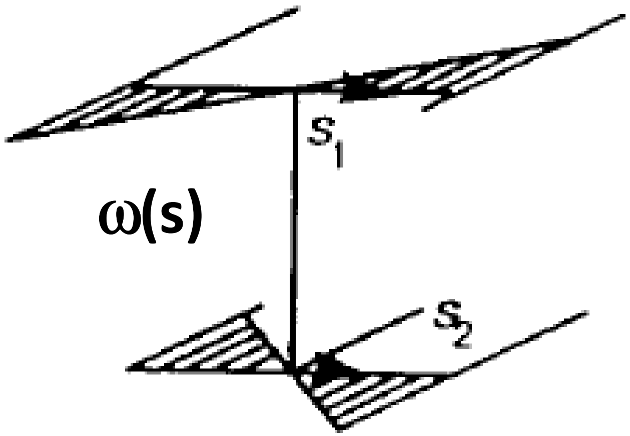
$$\Gamma = \frac{\mathbf{bd^3h}}{24}$$

**Rappresenta la rigidità di ingobbamento a torsione secondaria per la sezione ad I**

# Applicazione: Il caso della trave ad I

**Si dimostra che la funzione di ingobbamento nel caso in esame si scrive come**

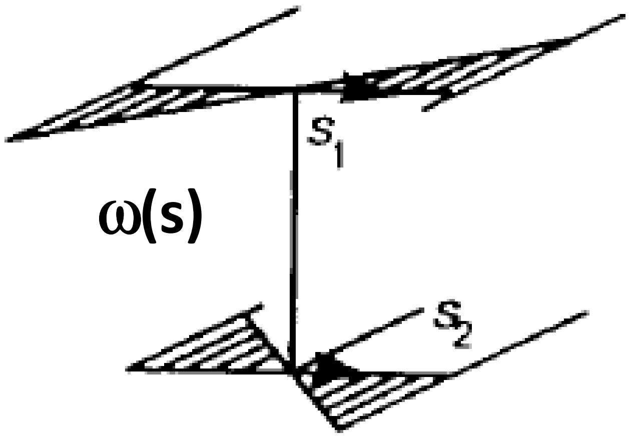
$$\omega(s) = \begin{cases} -(h/2)s_1 & \text{nella flangia superiore} \\ 0 & \text{sull'anima} \\ (h/2)s_2 & \text{nella flangia inferiore} \end{cases}$$

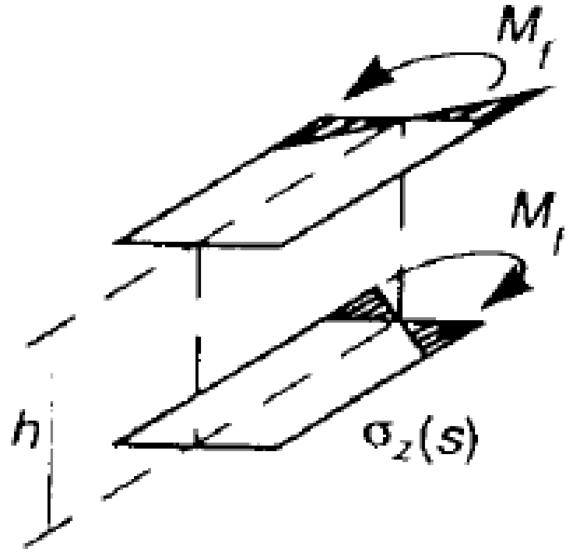


# Applicazione: Il caso della trave ad I

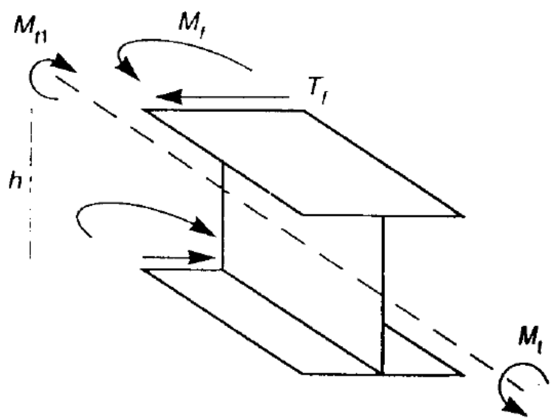
**È possibile visualizzare le tensioni normali associate alla torsione non uniforme che produce inflessione delle flange**

**Le tensioni normali  risultano proporzionali alla funzione di ingobbamento**



# Applicazione: Il caso della trave ad I




**Introduciamo il Bimomento definito come**

$$\mathbf{B} = \mathbf{E}\Gamma\theta''$$

**Esso rappresenta uno degli sforzi generalizzati associati al problema in esame**

**Nella sezione ad I il bimomento si scrive come**

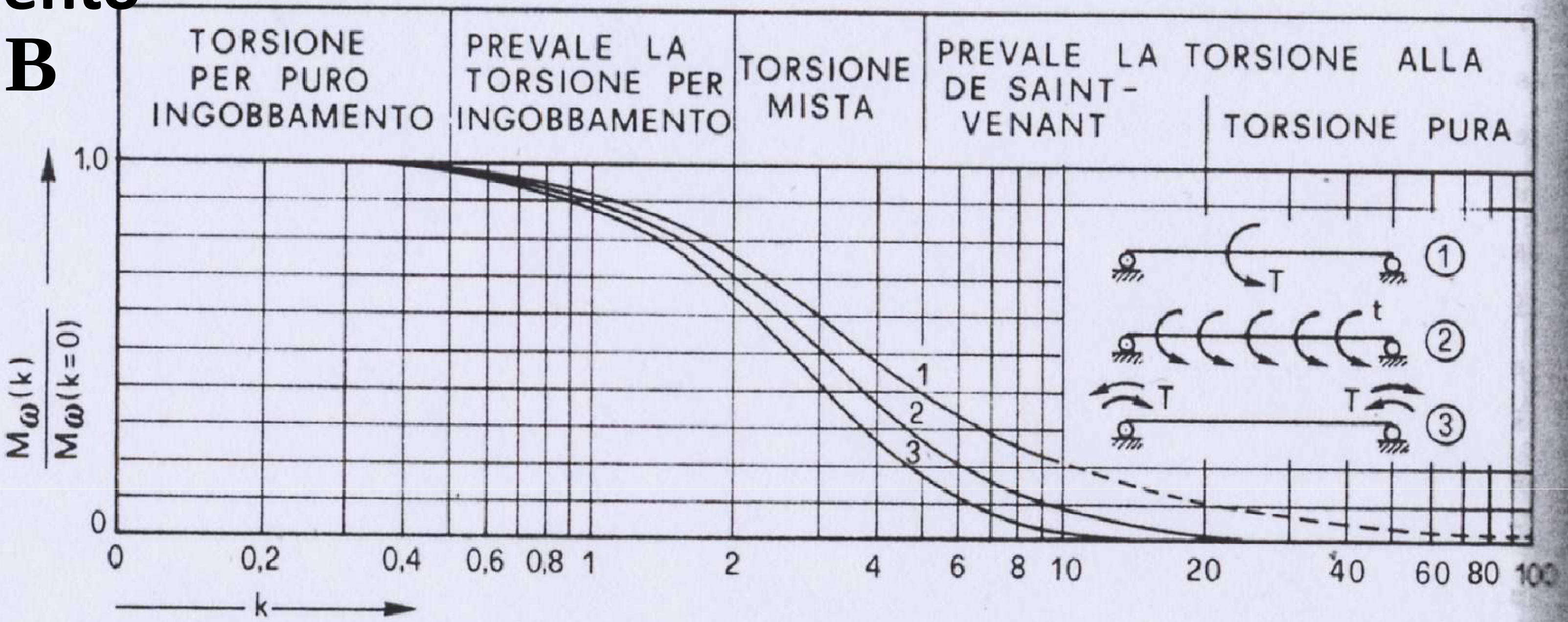
$$\mathbf{B} = \mathbf{M_f h}$$

**Prodotto momenti di flangia per la distanza delle flange stesse**

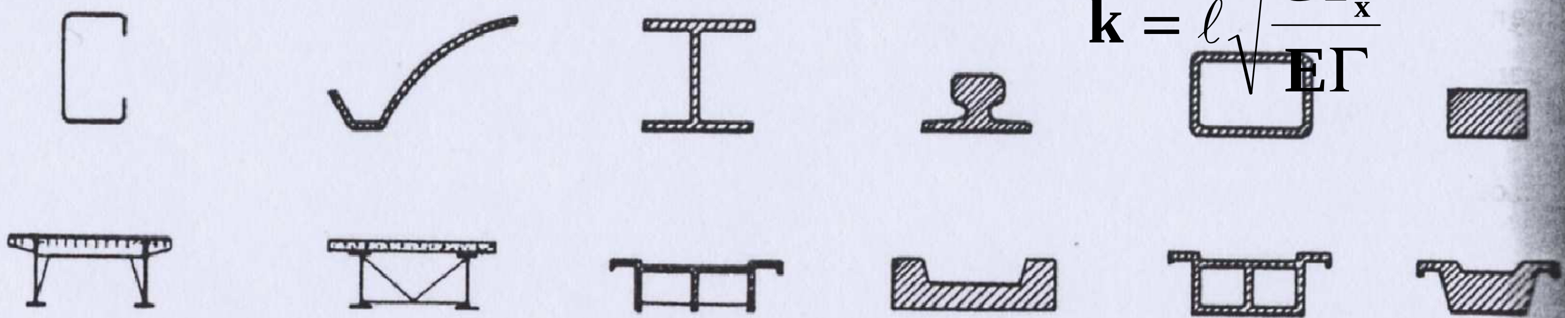
# Comportamento a torsione dei profili più usati

**bimomento**

$$\mathbf{M}_{\omega} = \mathbf{B}$$




$$\mathbf{k} = \ell\sqrt{\frac{\mathbf{GI_x}}{\mathbf{E\Gamma}}}$$



Ballio Mazzolani p 438

# Carichi critici instabilità flesso-torsionale

**L'instabilità flesso-torsionale è in genere descritta da equazioni differenziali complesse a coefficienti variabili**

**Tuttavia il momento critico può essere scritto nella forma**

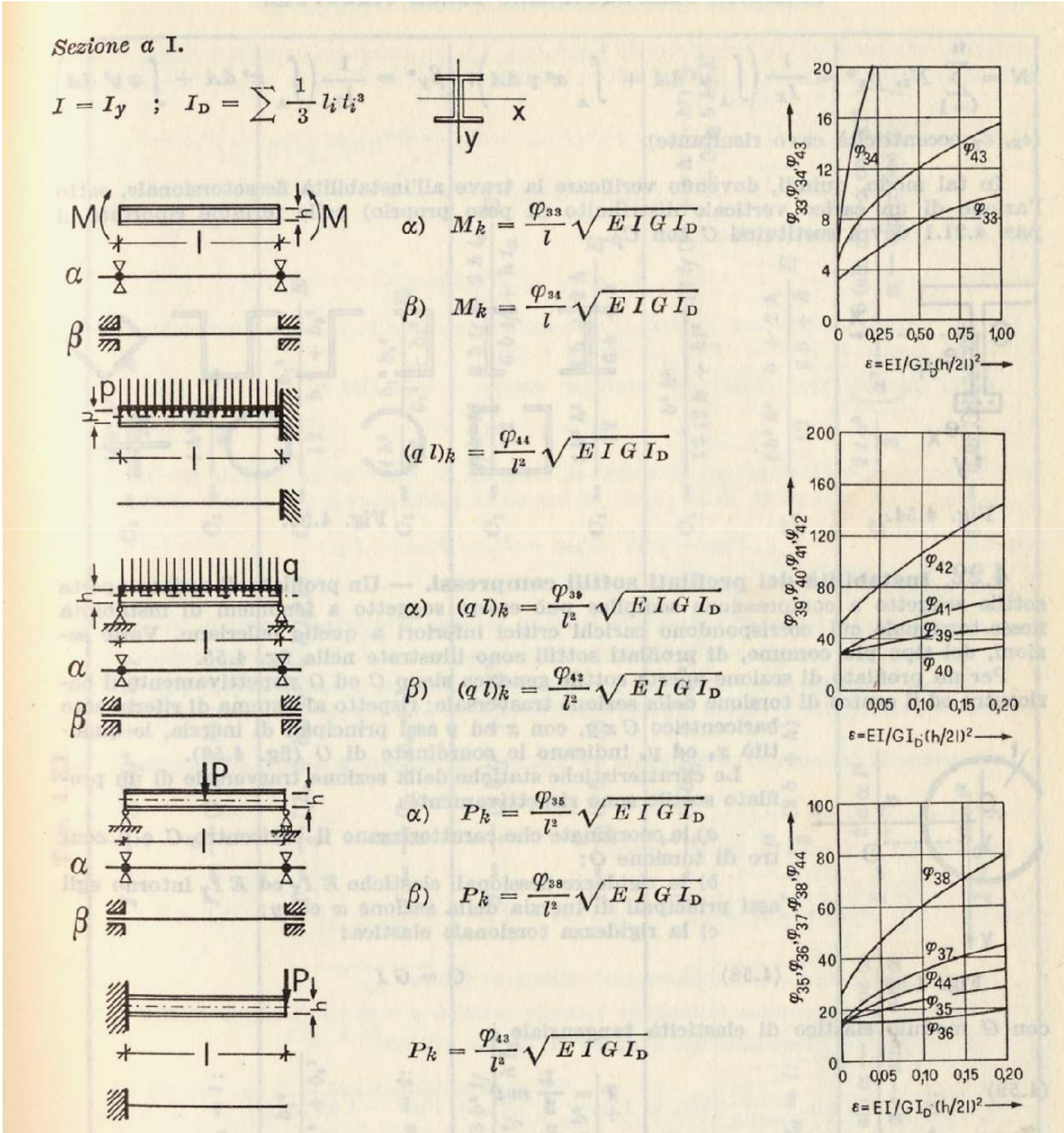
$$\mathbf{M}_{c} = \frac{\alpha}{\ell}\sqrt{\mathbf{EI}_{y}\mathbf{G}\Gamma}$$

**Dove $\alpha$ è una costante**

**Il momento critico aumenta con l'aumentare della rigidità flessionale trasversale secondo l'asse "debole" e con la rigidità torsionale**

**Ciò suggerisce di adottare profili HE o profili chiusi**

# Carichi critici instabilità flesso-torsionale

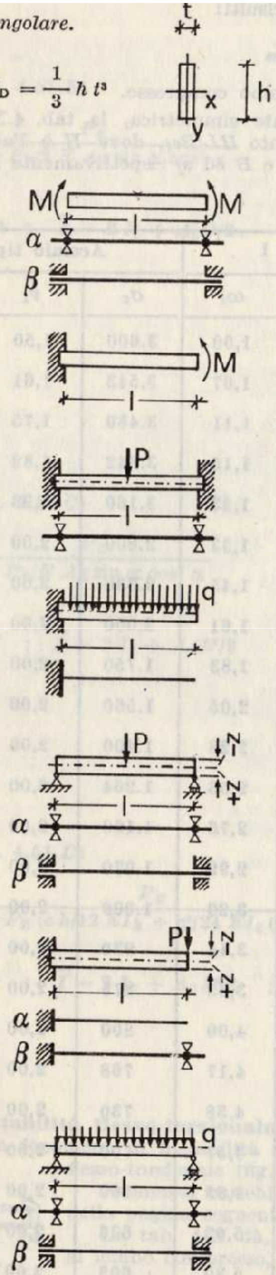



**Manuale dell’inge-gnere civile Capitolo instabilità**

# Carichi critici instabilità flesso-torsionale

*Sezione rettangolare.*

$I = I_y \;;\; I_D = \frac{1}{3} h\, t^3$




α) $M_k = \frac{\pi}{l} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

β) $M_k = \frac{2\pi}{l} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

$M_k = \frac{\pi}{2\, l} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

$P_k = \frac{44{,}5}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

$(q\, l)_k = \frac{12{,}85}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

α) $P_k = \frac{16{,}94}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

β) $P_k = \frac{26{,}6}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

α) $P_k = \frac{4{,}013}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

β) $P_k = \frac{5{,}50}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

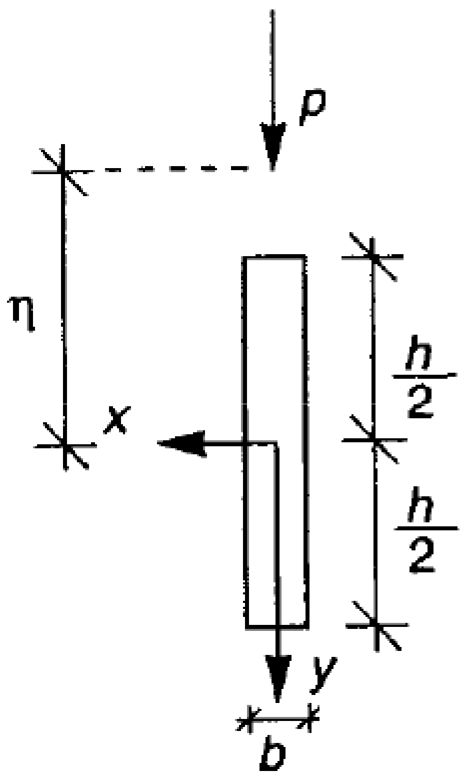
α) $(q\, l)_k = \frac{28{,}3}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

β) $(q\, l)_k = \frac{48{,}8}{l^2} \sqrt{E\, I\, G\, I_D}$

Fig. 4.53 *A*.

**Manuale dell'inge-gnere civile Capitolo instabilità**

# Dipendenza del carico critico flesso-torsionale dal punto di applicazione del carico



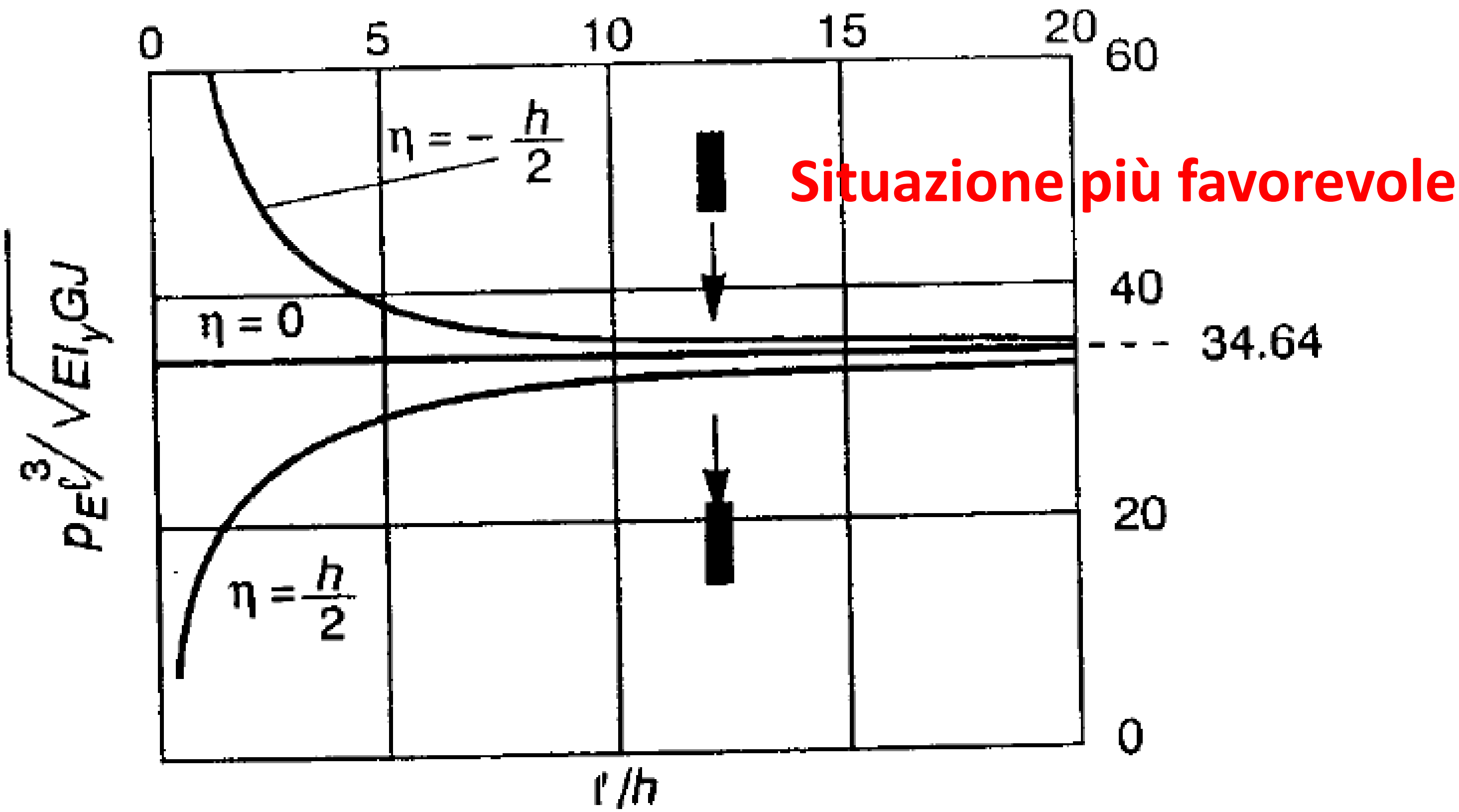

**Data una trave vincolata con appoggi flesso-torsionali ai due estremi con sezione rettangolare sottile, soggetta ad un carico trasversale uniforme p = costante applicato ad una distanza η dal centro di taglio C coincidente col baricentro G**

**La sezione è doppiamente simmetrica, la sua EPT si scrive come**

$$V_2\left(\begin{Bmatrix} u \\ \vartheta \end{Bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell}[EI_y u''^2 + GJ\vartheta'^2 - 2(M_x^0\vartheta)'u' - p\eta\vartheta^2]dz$$

# Dipendenza del carico critico flesso-torsionale dal punto di applicazione del carico

**Si ottiene il seguente andamento per il carico critico al variare del punto di applicazione del carico**



# Travi a traliccio

**4.15.2. Verifica all'instabilità del corrente compresso.**

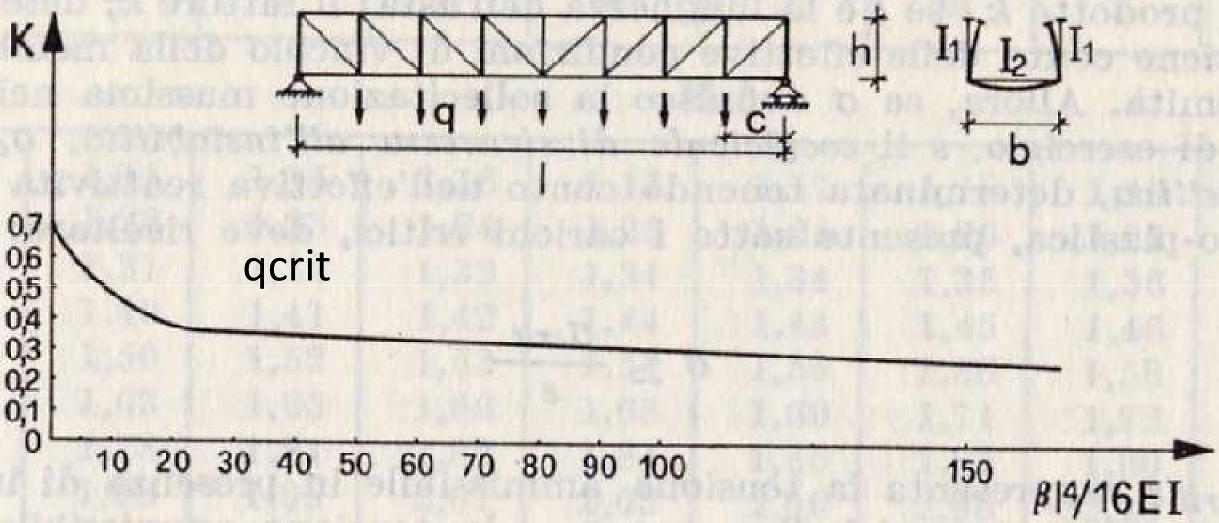



Fig. 4.43.

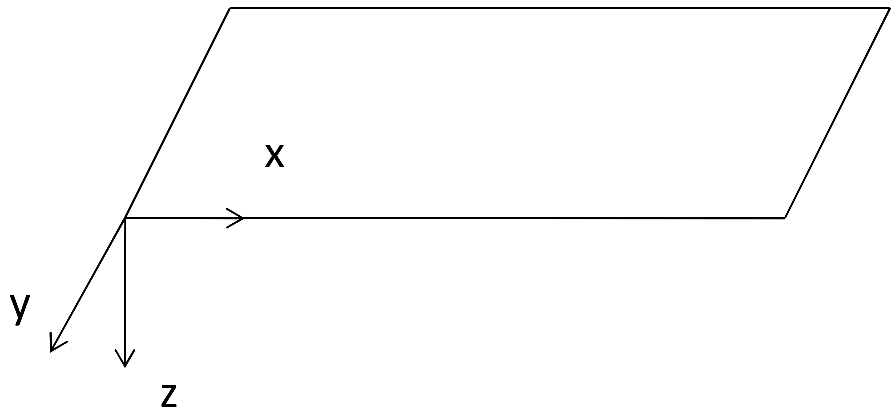
$$q_{crit} = \frac{8\,h}{l^2}\,\frac{\pi^2 EI}{(k\,l)^2}\;;\quad \beta = \frac{R_0}{c}\;;\quad R_0 = \frac{6\,E/h^2}{2\,h/J_1 + 3\,b/I_2}\,.$$

# Instabilità di lastre piane

**LC II vol**
**Equazione di equilibrio di Sophie Germain-Lagrange per le piastre sottili in configurazione fondamentale**

$$\nabla^4 \mathbf{w} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{D}} \leftrightarrow \frac{\partial^4 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^4} + \frac{\partial^4 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}^4} + 2\frac{\partial^4 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2 \partial \mathbf{y}^2} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{D}}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{E}\mathbf{s}^3}{12(1-\nu^2)}$$



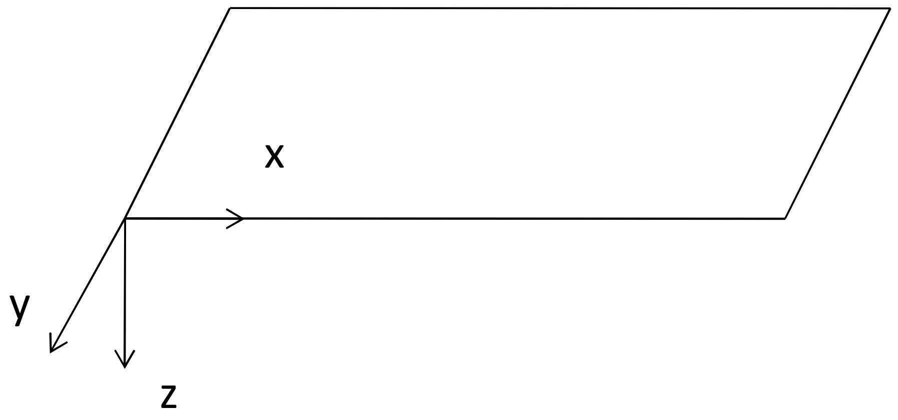
# Instabilità di lastre piane

**LC II vol**

**Equazione di equilibrio di Von Karman in configurazione variata si scrive**

$$\mathbf{D}\nabla^4\mathbf{w} = \mathbf{N}_{\mathbf{x}}^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}^2} + \mathbf{N}_{\mathbf{y}}^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}^2} + 2\mathbf{N}_{\mathbf{xy}}^0 \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{y}}$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{Es}^3}{12(1-\nu^2)}$$



# Instabilità di lastre piane

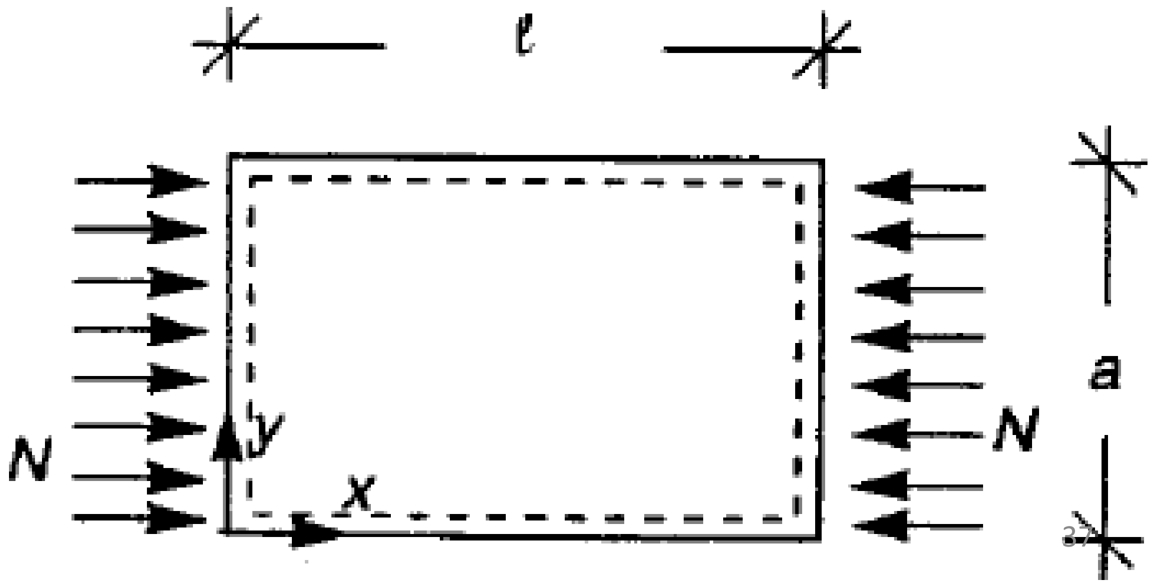
**LC II vol**

## Caso della trave appoggiata e compressa uniformemente

$$N_x^0 = -N, \quad N_y^0 = 0, \quad N_{xy}^0 = 0 \Longrightarrow D\nabla^4 w = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$D\nabla^4 w = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$D = \frac{Es^3}{12(1-\nu^2)}$$



# Instabilità di lastre piane

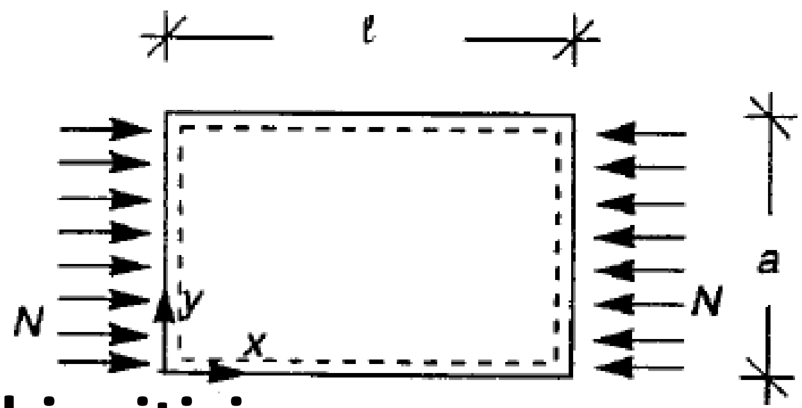
**La soluzione dell'equazione di equilibrio si cerca con il metodo di Ritz espandendo w in serie di Fourier**

$$w(x,y) = W_{nm} \sin\frac{n\pi x}{\ell} \sin\frac{m\pi y}{a}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{D\nabla^4 w = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}$$

$$\Downarrow$$




**Si ottengono i seguenti carichi critici**

$$\boxed{\mathbf{N_{nm} = D\frac{\pi^2\ell^2}{n^2}\left(\frac{n^2}{\ell^2}+\frac{m^2}{a^2}\right)}}$$

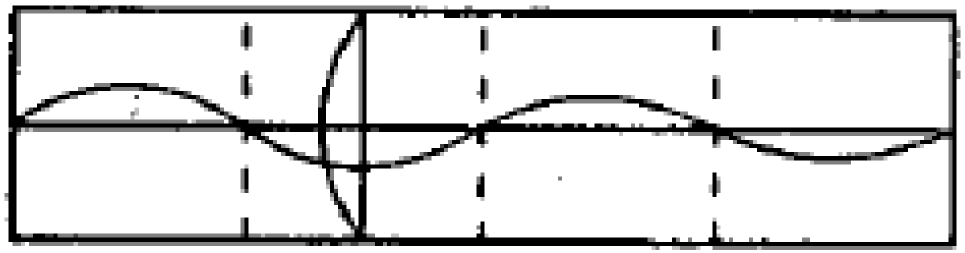
# Instabilità di lastre piane

**Il più piccolo carico critico si ottiene per m=1 ed è pari a**

$$\mathbf{N_E} = \mathbf{K}\pi^2 \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{a}^2} \quad \textbf{con} \quad \mathbf{K} = \min_{\mathbf{n}} \mathbf{K_n}, \quad \mathbf{K_n} = (\mathbf{n}\frac{\mathbf{a}}{\ell} + \frac{1}{\mathbf{n}}\frac{\ell}{\mathbf{a}})^2$$

**Cui corrisponde la deformata critica che presenta n semionde in direzione carico ed una semionda in direzione normale**

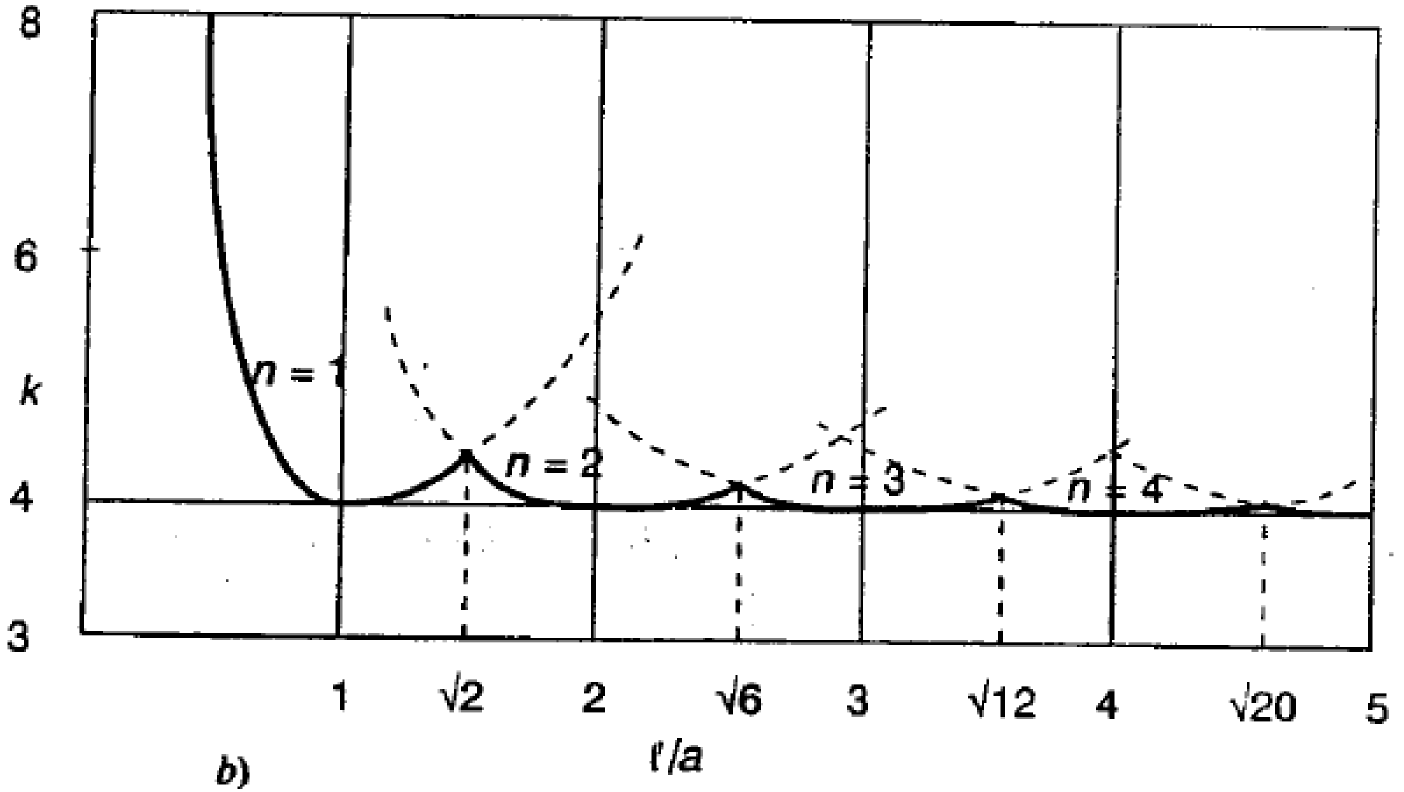
$$w_E(x,y) = W_{n1} \sin\frac{n\pi x}{\ell} \sin\frac{\pi y}{a}$$



# Instabilità di lastre piane

## Diagramma che rappresenta K al variare di ℓ/a

$$\mathbf{K} = \min_{\mathbf{n}} \mathbf{K}_{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{K}_{\mathbf{n}} = \left(\mathbf{n}\frac{\mathbf{a}}{\ell} + \frac{1}{\mathbf{n}}\frac{\ell}{\mathbf{a}}\right)^2$$




**Difatto si assume K=4 valore cui tende per ℓ/a>>**

$$N_E \cong 4\pi^2 \frac{D}{a^2} \quad \text{per} \quad \ell \geq a$$

# Esempi di instabilità flesso-torsionale

**The following photo shows local buckling of the compression flange**

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

## The following photo shows local buckling of the compression flange

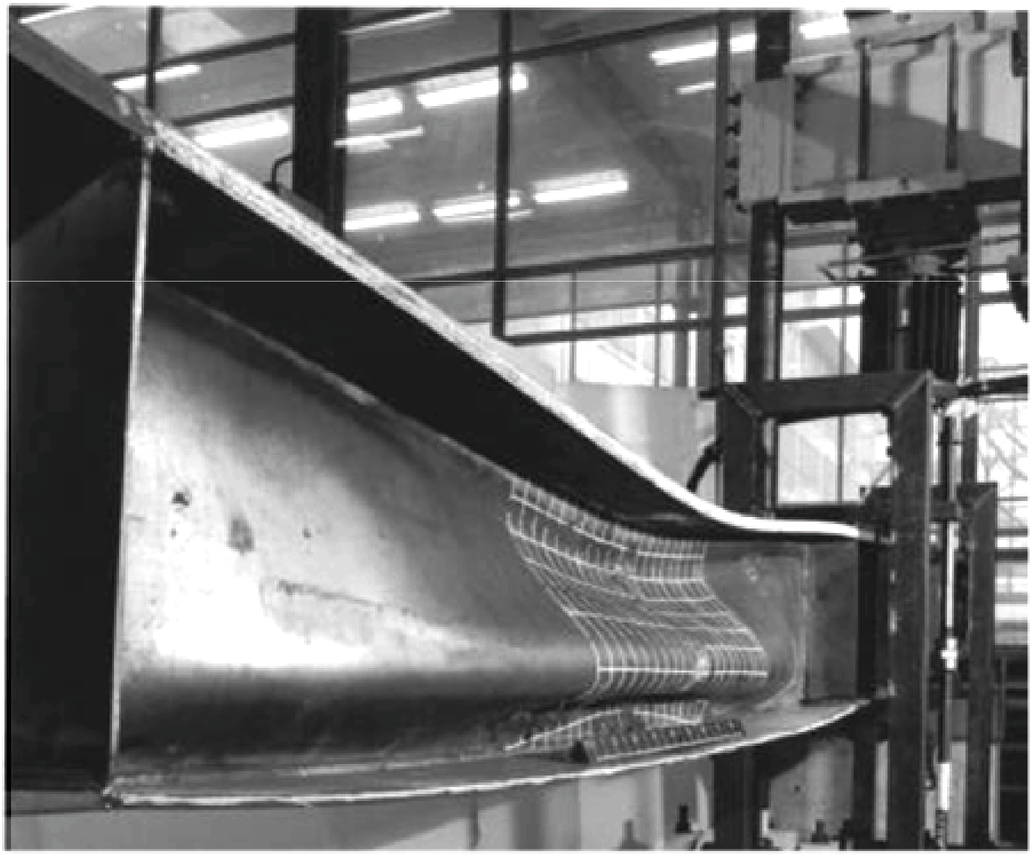
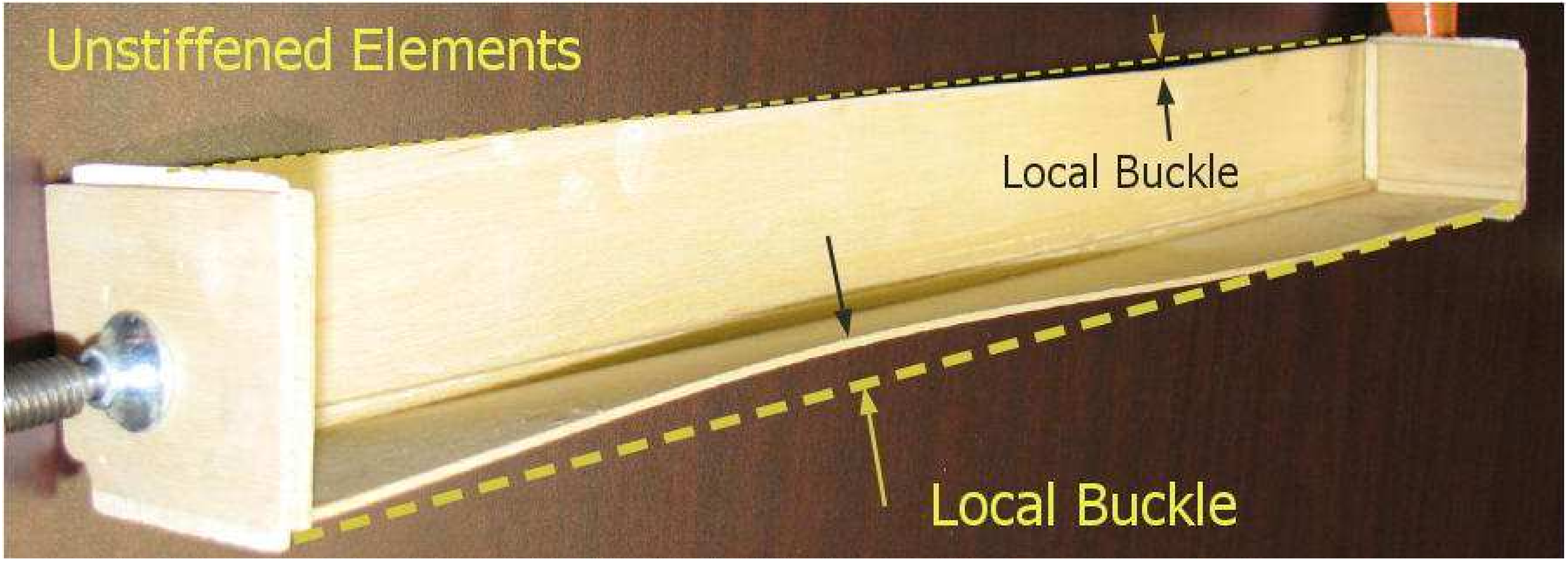


Figure 2. Vertical web buckling.

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

**The following photo shows local buckling of the compression flange**



# Esempi di instabilità flesso-torsionale

**La trave da ponte collassa in fase di costruzione a causa della mancanza della soletta di cls di copertura che le conferisce rigidità torsionale in fase di esercizio**

# Esempi di instabilità flesso-torsionale

**La trave da ponte collassa in fase di costruzione a causa della mancanza della soletta di cls di copertura che le conferisce rigidità torsionale in fase di esercizio**

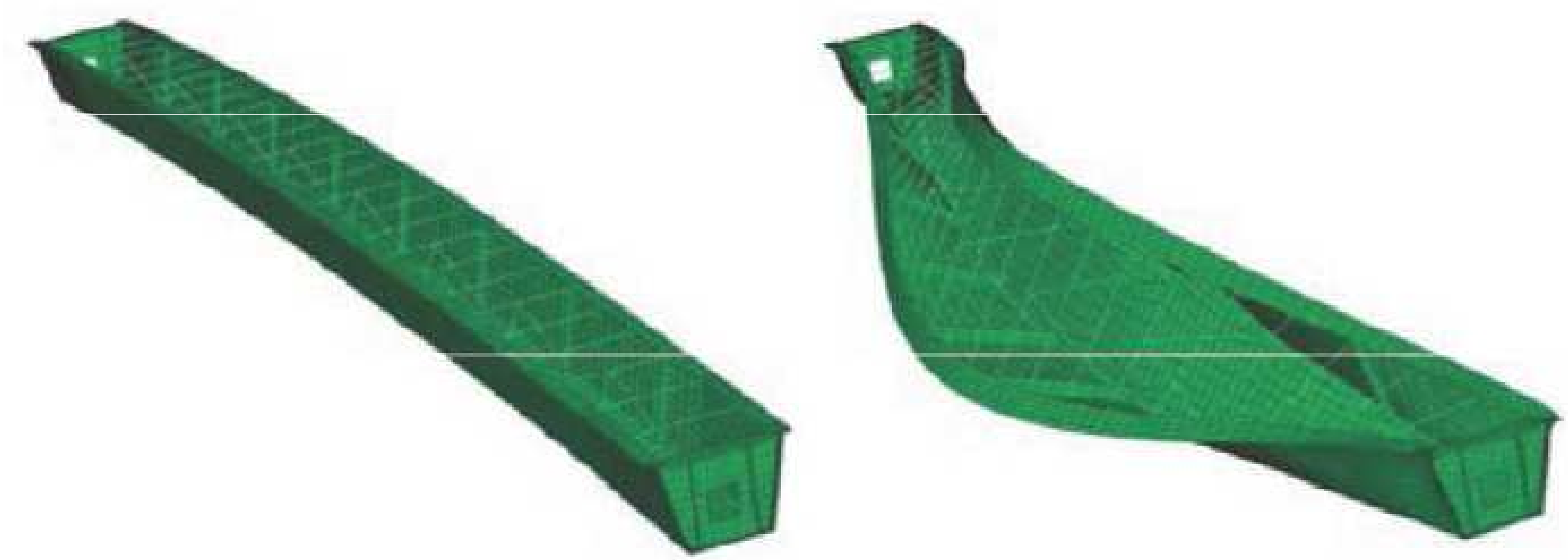


*Figure 5: Finite element model of the Marcy Pedestrian Bridge showing the undeformed shape and the global lateral-torsional buckling mode.*

# Esempi di instabilitò flesso-torsionale

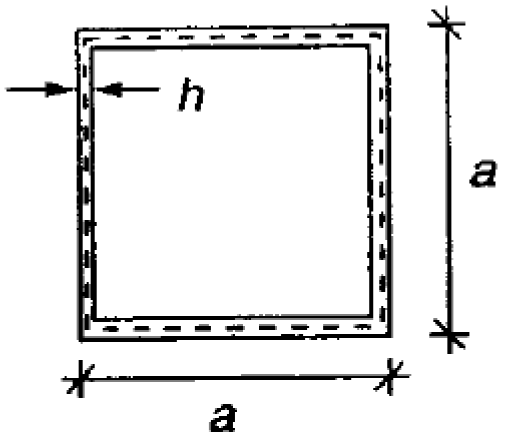
**The following photo shows local buckling**

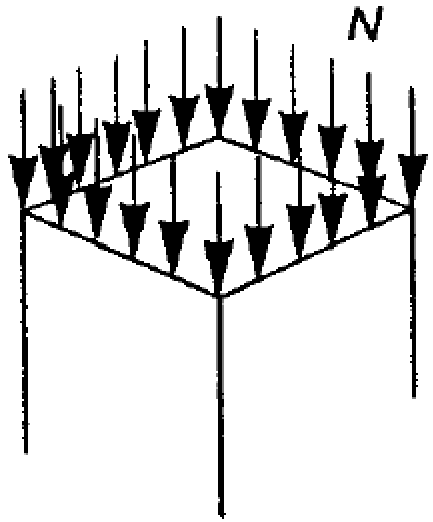
# Instabilità locale e globale di lastre piane

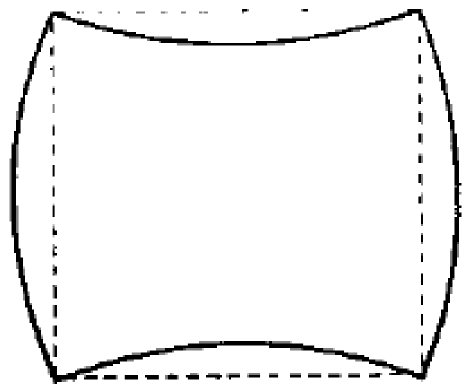
**Le pareti di profili sia chiusi che aperti sono lastre molto allungate**

**Se tali lastre sono sottili possono instabilizzarsi dando luogo ad imbozzamenti che possono interessare zone più o meno estese**

**Si tratta di instabilità locale che può precedere sia l'instabilità della trave nel suo complesso che il raggiungimento del limite elastico del materiale**



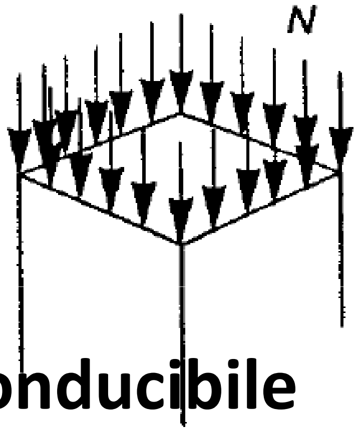



# Instabilità locale e globale di lastre piane

**Prendiamo la trave lunga ℓ in figura supposta uniformemente compressa**

**il carico critico euleriano globale della trave è $P_E=\pi^2EI/\ell^2$**

**cui corrisponde la tensione**




$$\sigma_E^G = \frac{P_E}{A} = \frac{1}{6}\pi^2 E\left(\frac{a}{\ell}\right)^2$$

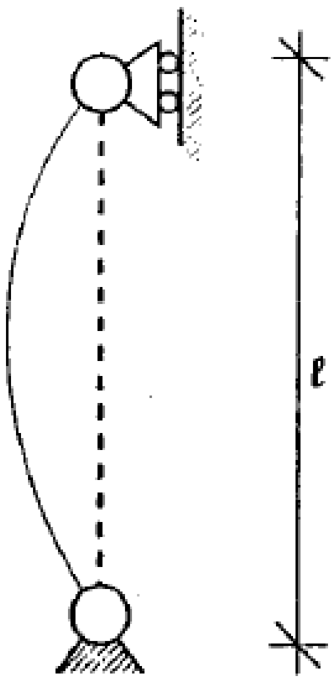
**Tuttavia il carico si ripartisce su ciascuna parete componente la trave e dunque il problema è riconducibile a quello della lastra appoggiata**

**→ La tensione corrispondente al carico critico locale si scrive come**

$$\sigma_E^L = \frac{N_E}{h} = \frac{1}{3}\pi^2 \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{a}\right)^2$$

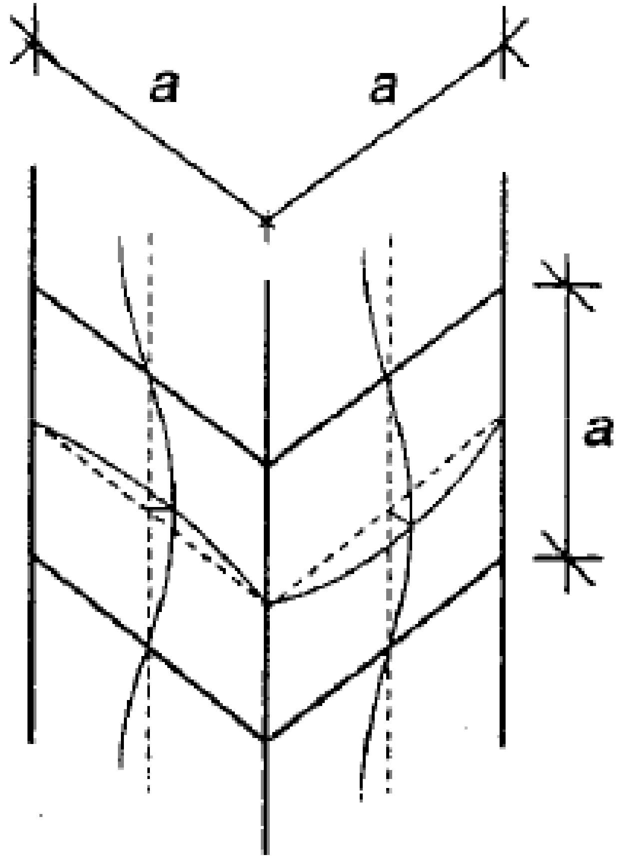
# Instabilità locale e globale di lastre piane

## Globale




$$\sigma_E^G = \frac{P_E}{A} = \frac{1}{6}\pi^2 E\left(\frac{a}{\ell}\right)^2$$

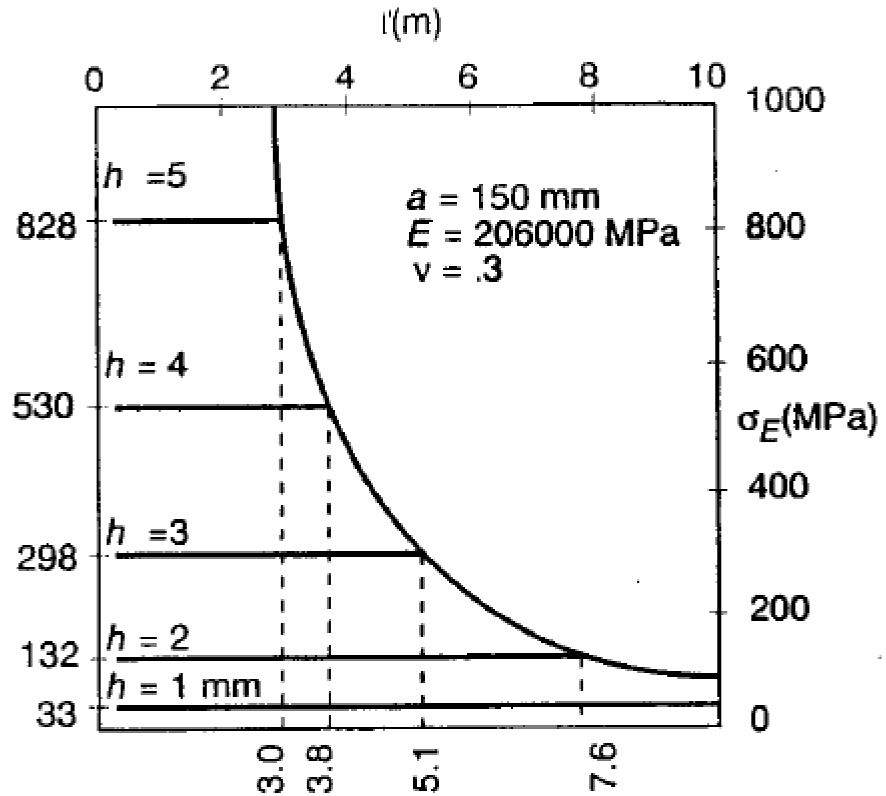
## Locale




$$\sigma_E^L = \frac{N_E}{h} = \frac{1}{3}\pi^2 \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{a}\right)^2$$

# Instabilità locale di lastre piane

$$\sigma_E = \begin{cases} \sigma_E^L & \text{se} \quad \dfrac{\ell}{a} \leq \sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{2}}\,\dfrac{a}{h} \quad \text{(instabilità locale)} \\ \sigma_E^G & \text{se} \quad \dfrac{\ell}{a} > \sqrt{\dfrac{1-\nu^2}{2}}\,\dfrac{a}{h} \quad \text{(instabilità globale)} \end{cases}$$



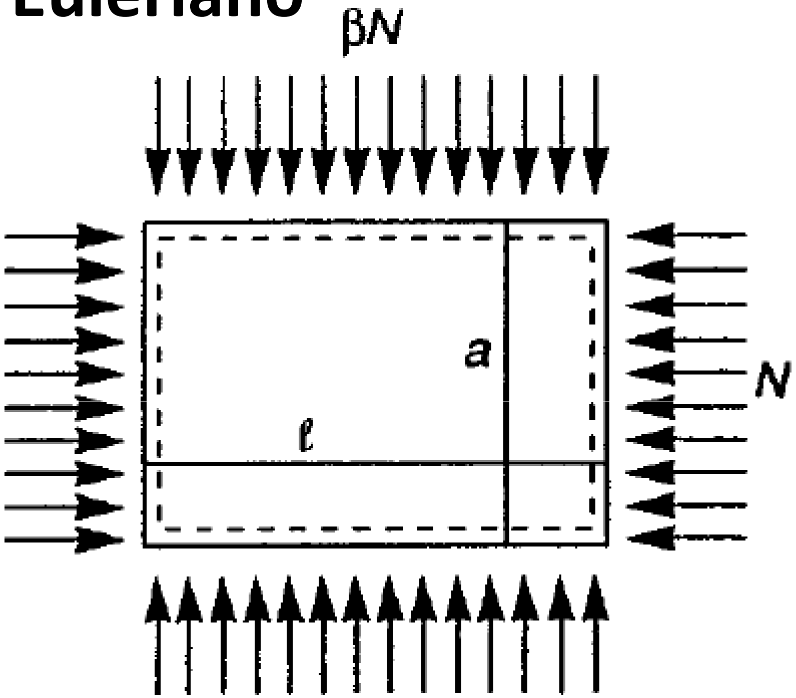

**Il carico critico euleriano per unità di area sarà dunque il minimo tra i due carichi critici globale e locale**

$$\sigma_E^G = \frac{P_E}{A} = \frac{1}{6}\pi^2 E\left(\frac{a}{\ell}\right)^2$$

$$\sigma_E^L = \frac{N_E}{h} = \frac{1}{3}\pi^2 \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{a}\right)^2$$

# Lastra compressa secondo 2 direzioni ortogonali

**Operando come in precedenza si ottiene il carico critico Euleriano**

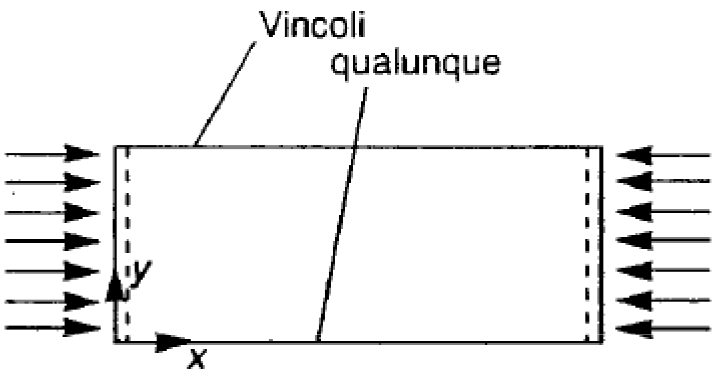



$$N_E = \min_{n,m} \quad \pi^2 D \frac{\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \frac{m^2}{a^2}\right)^2}{\left(\frac{n^2}{\ell^2} + \beta \frac{m^2}{a^2}\right)}$$

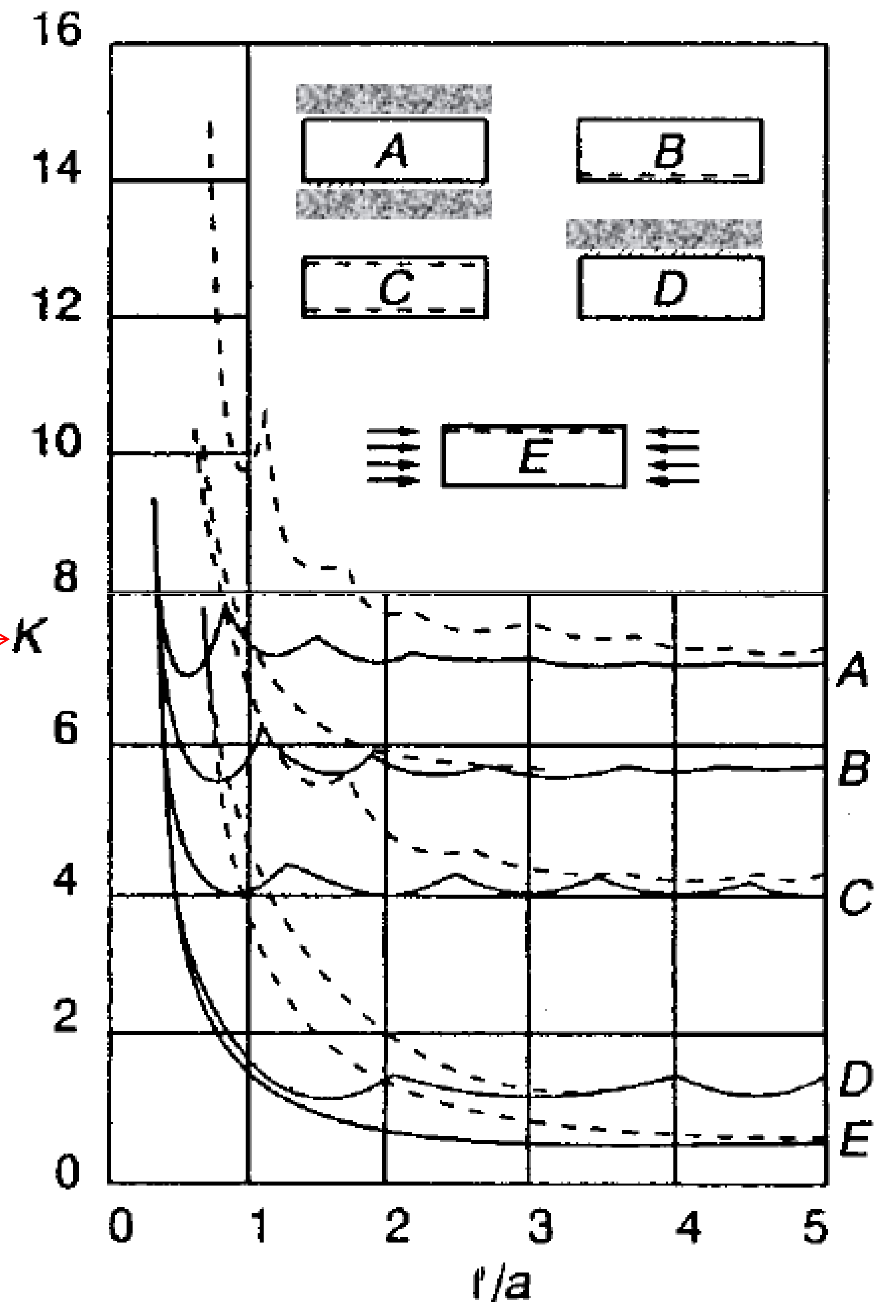
**Si constata che $N_E$ si ottiene per m=1 e dunque si può scrivere**

$$N_E = K\pi^2 \frac{D}{a^2} \qquad K = \min_n K_n \qquad K_n = \left(\frac{na}{\ell} + \frac{1}{n}\frac{\ell}{a}\right)^2$$

# Influenza delle condizioni di vincolo




$$N_E = K\pi^2 \frac{D}{a^2}$$

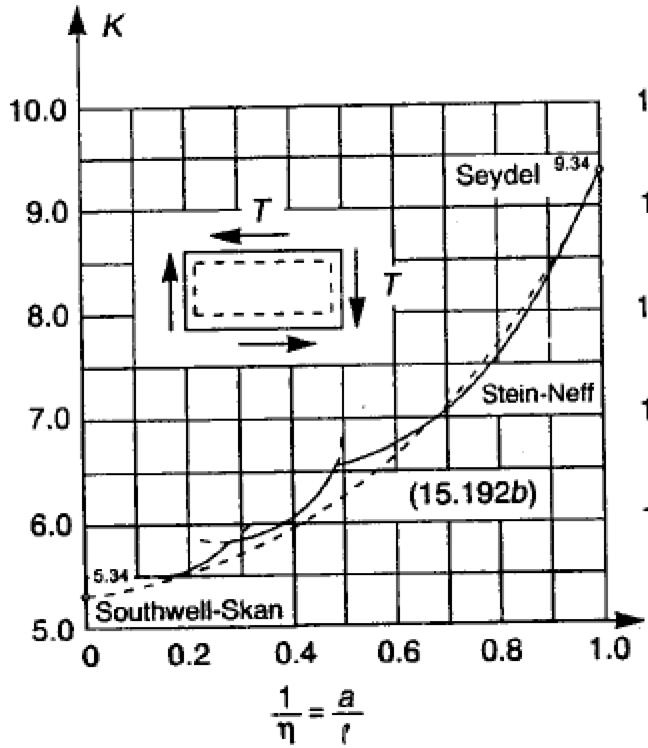


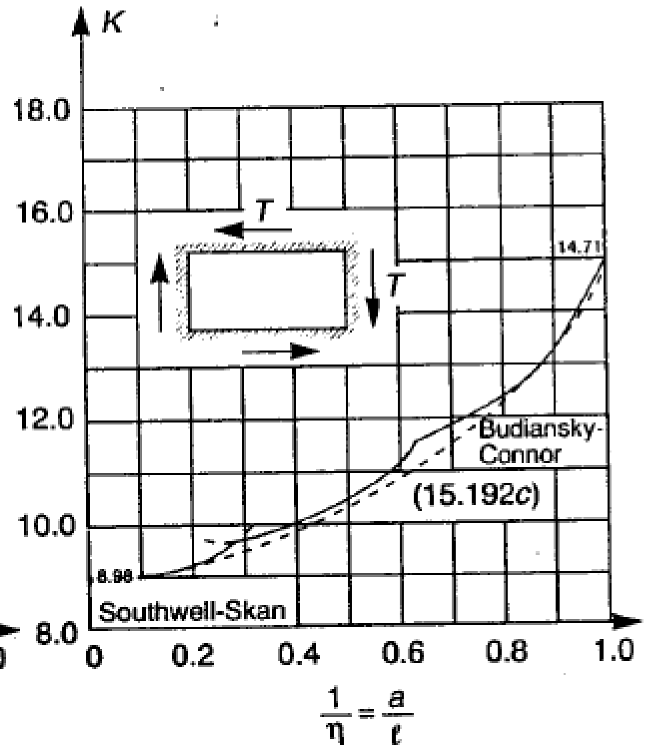
# Lastre soggette ad azioni taglianti

**Valore del taglio critico**

$$T_E = \pm K\pi^2 \frac{D}{a^2}$$

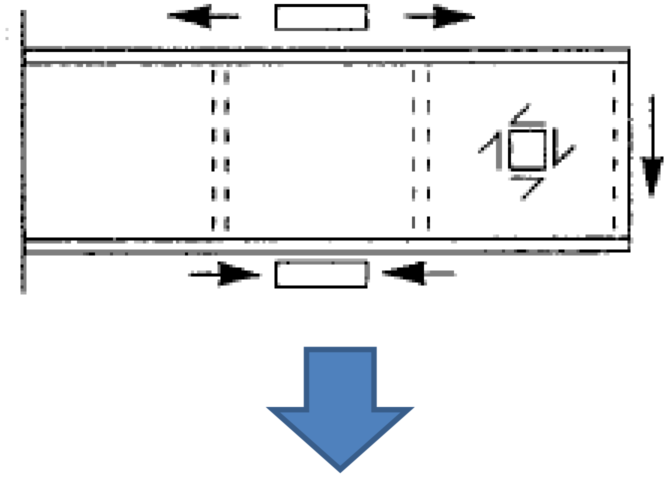
**Dove K si determina dai diagrammi sotto riportati**



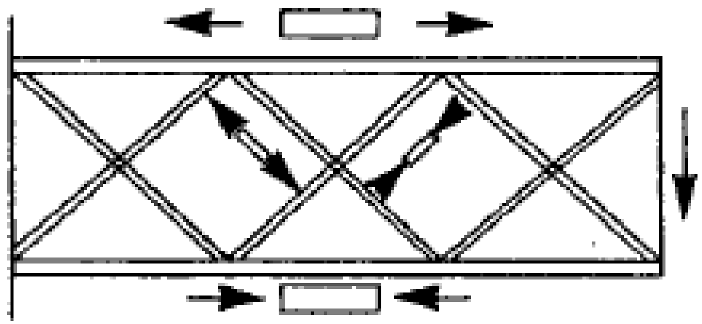



# Pannelli irrigiditi

**In assenza di irrigidimenti la lastra non è in grado di assorbire il carico dopo l'imbozzamento**



**Con gli irrigidimenti la lastra è in grado di assorbire il carico dopo l'imbozzamento aumentano le risorse post-critiche**

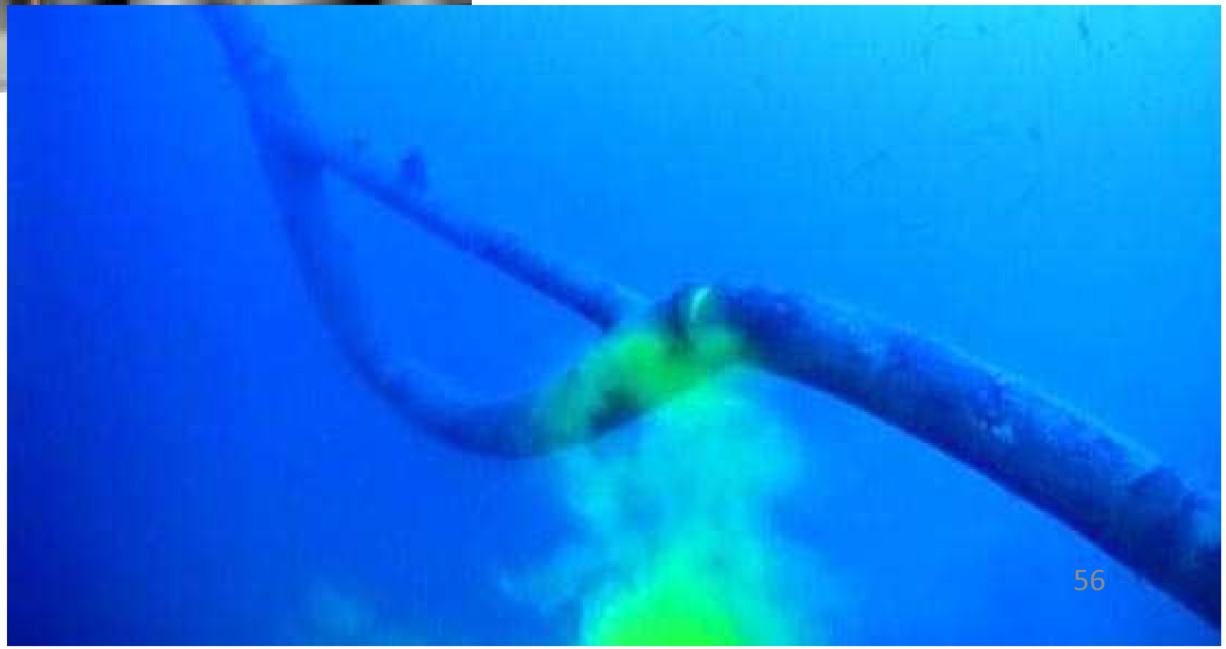


# Prevention of lateral Buckling

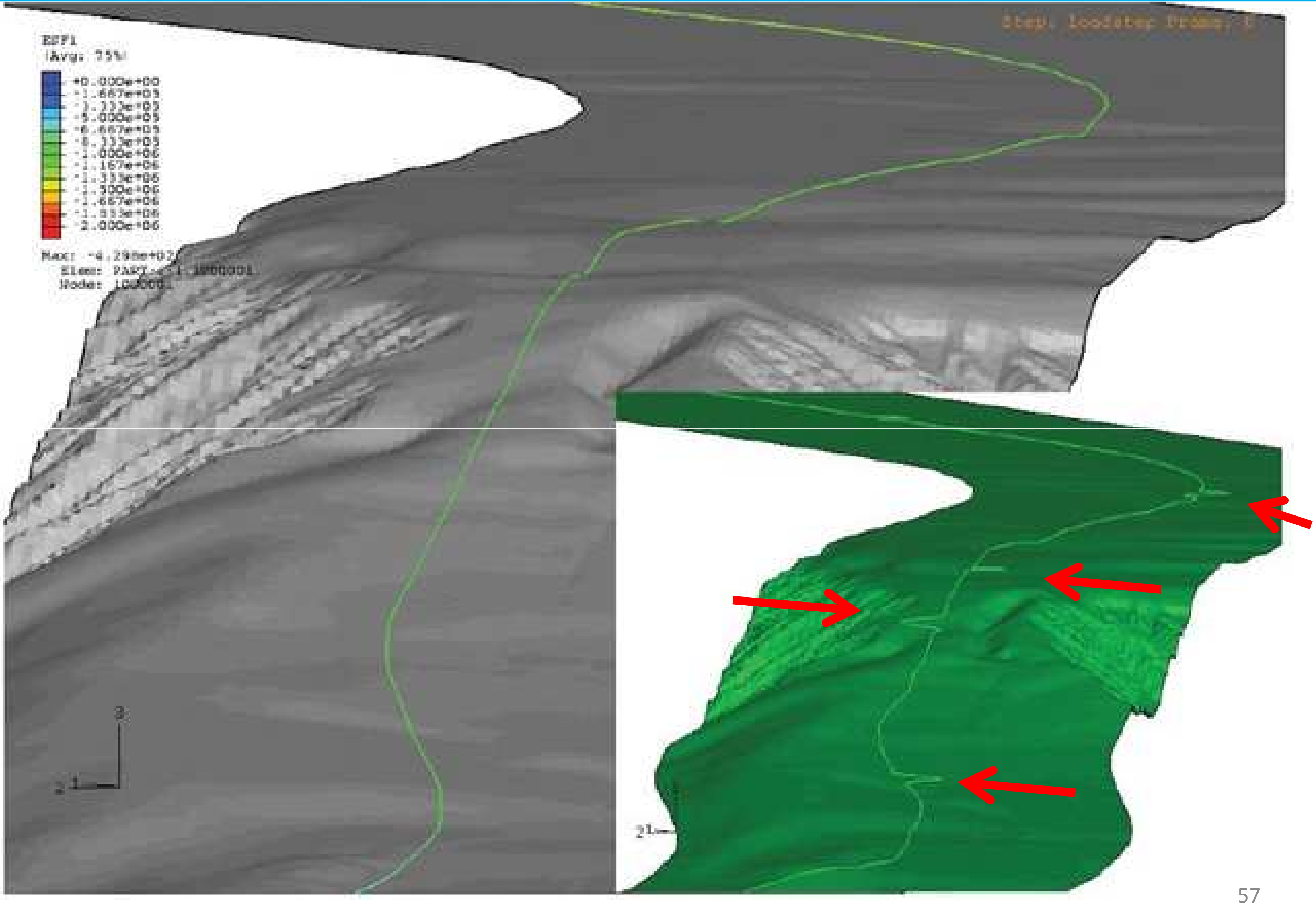
## Lateral buckling of a cantilever

**Additional supports provided to prevent lateral torsional buckling through reducing the beam length**

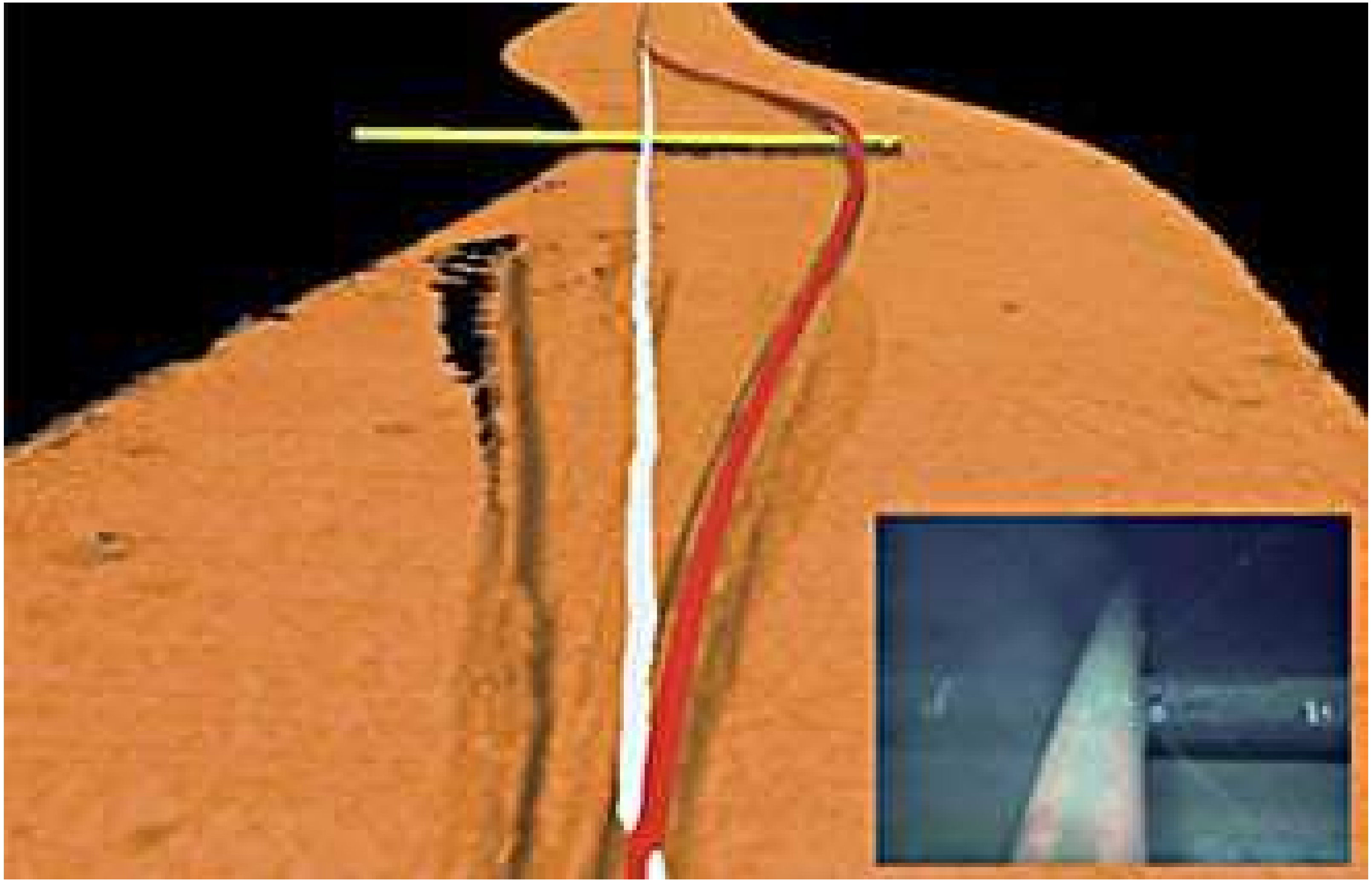
# Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi



# Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi



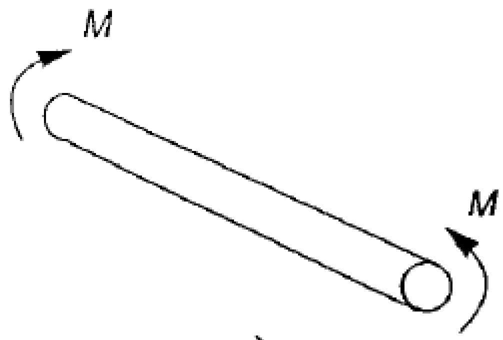
# Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi



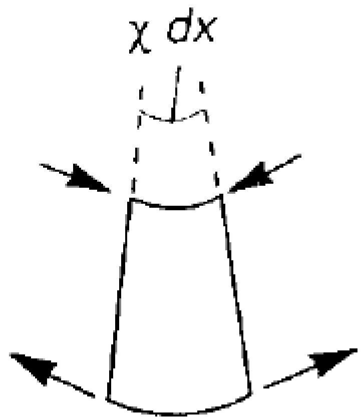
# Cilindri cavi inflessi: Ovalizzazione dei tubi

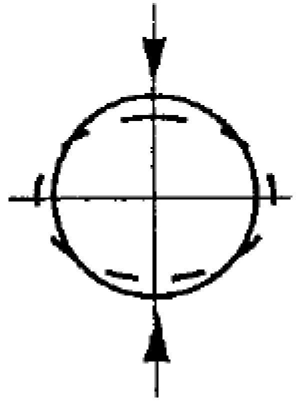
**LC III p 396**

**Effetto Brazier**

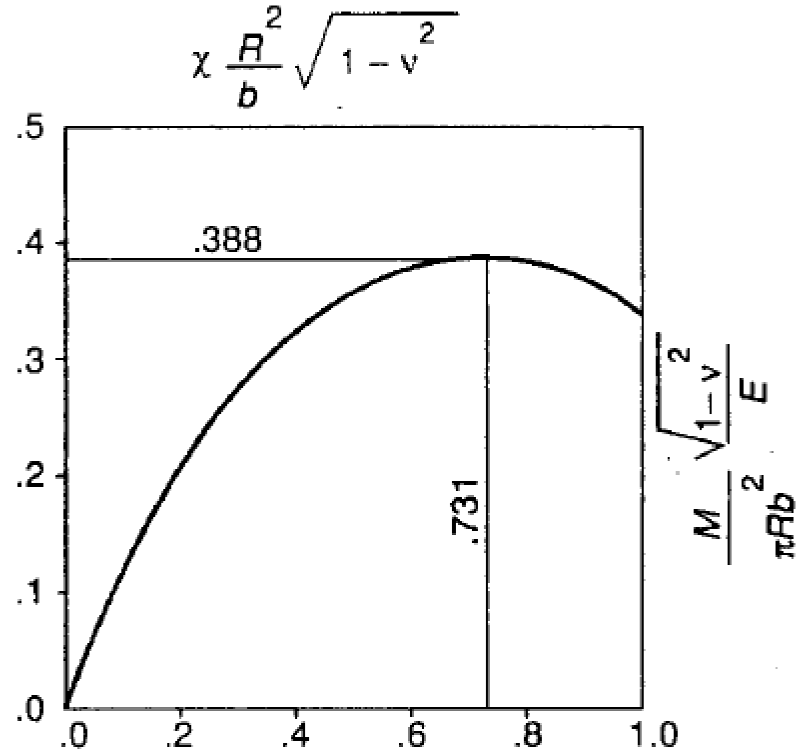



a)



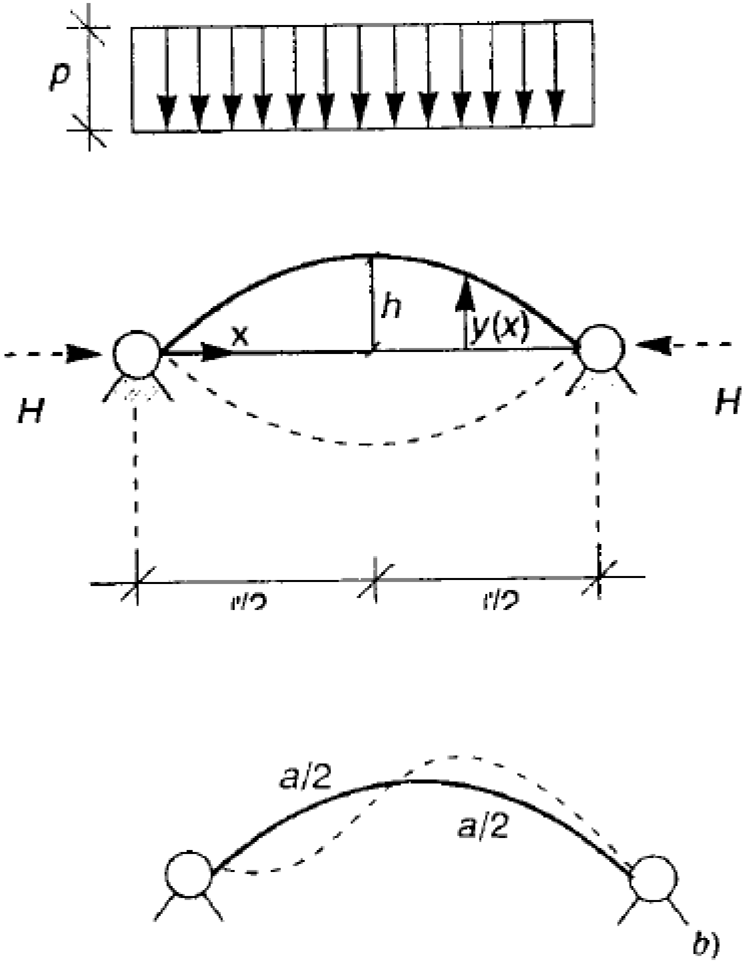
**Relazione momento curvatura**




**In corrispondenza del picco si ha l'ovalizzazione**
**Ovvero instabilità a scatto**

# Instabilità di archi ribassati : arco incernierato

## Esempi di problemi non Euleriani

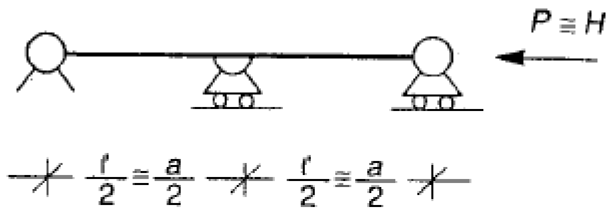



**Instabilità Euleriana si manifesta per inflessione inestensionale secondo la deformata critica antisimmetrica**

**Il valore $H_E$ della reazione orizzontale del vincolo per cui si instabilizza è**

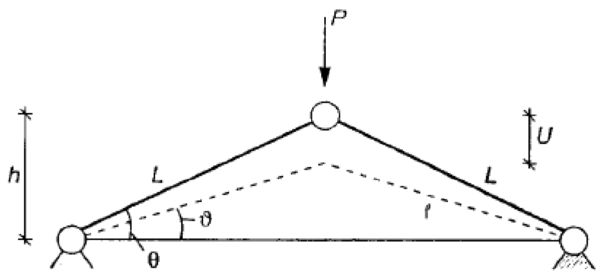
$$\mathbf{H_E} \cong 4\pi^2 \frac{\mathbf{EI}}{\ell^2}$$

**Ottenuto per analogia con un'asta incernierata**



# Instabilità di archi ribassati : arco incernierato

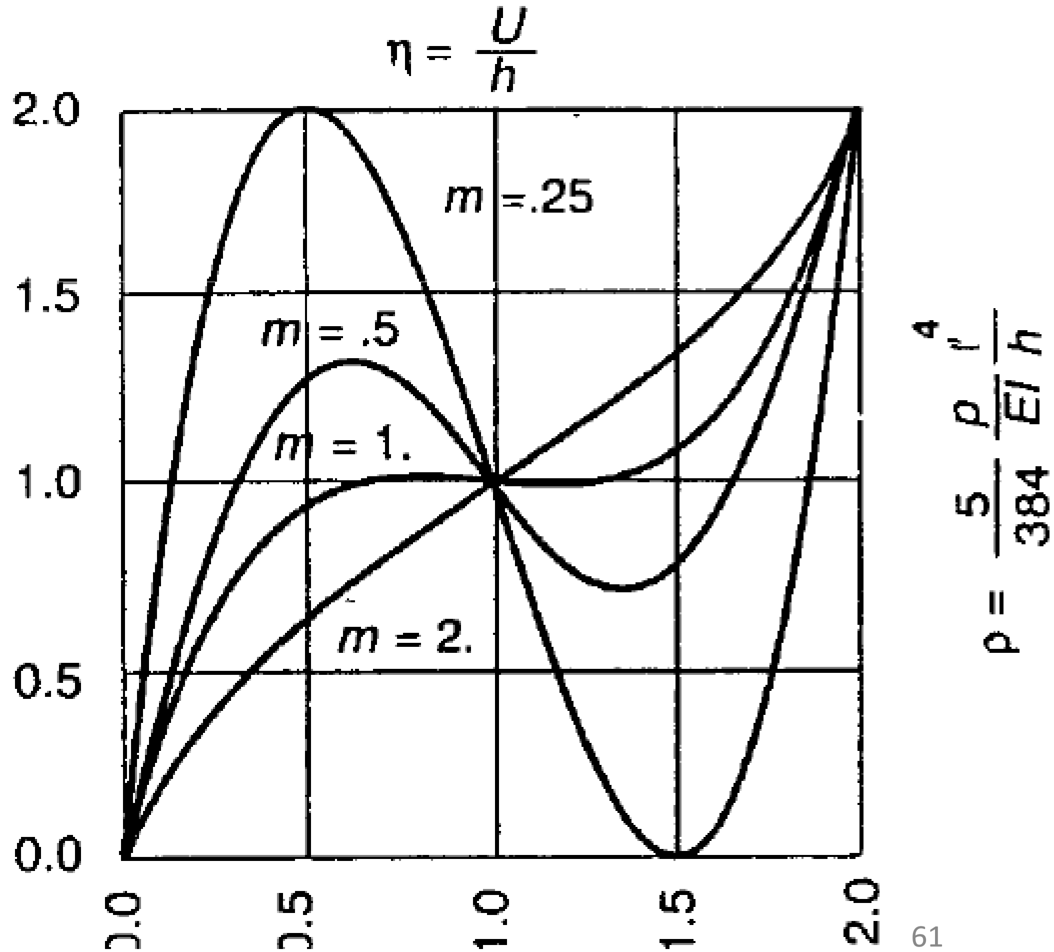
**Un'analisi non lineare mostra un'instabilità a scatto (snap through) simile a quella dell'arco a 3 cerniere**




**Il comportamento dell'arco può essere descritto per mezzo della relazione tra lo spostamento U in mezzeria ed il carico ρ**

$$\varrho = \frac{5}{384}\frac{p\ell^4}{EIh}$$

$$m = 4\frac{I}{h^2 A}$$

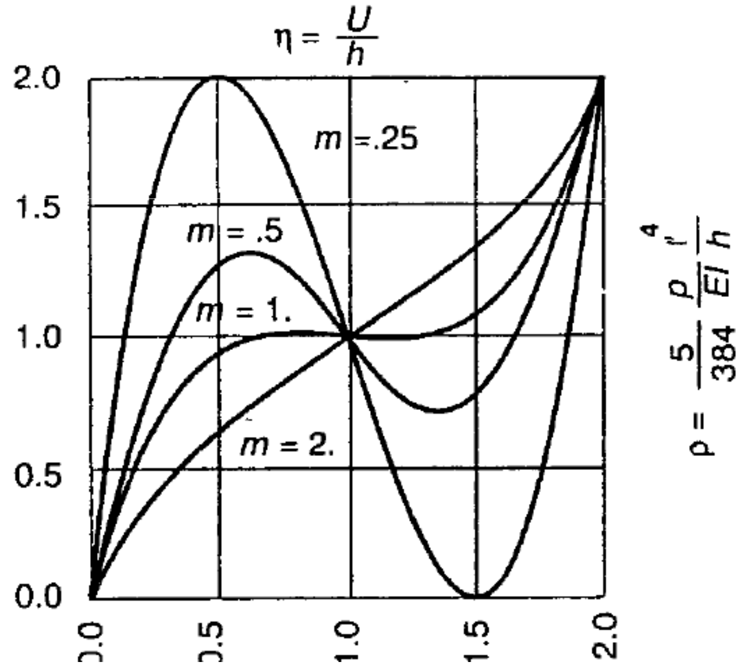


# Instabilità di archi ribassati : arco incernierato

a) m<0.182 evento critico è la biforcazione, che si verifica per $\mathbf{H_E} \cong 4\pi^2 \dfrac{\mathbf{EI}}{\ell^2}$ occorre un'analisi non lineare

b) 0.182<=m<1 collasso avviene per instabilità a scatto

c) m>=1 la transizione a configurazioni rovesciate avviene con continuità e la capacità portante è dettata dal limite di deformabilità tollerabile



## Instabilità di membrane e gusci

**Initial post-buckling deflection pattern of cylindrical shell**