Vibrazioni torsionali di una trasmissione nautica –
Esercizio da portare in forma scritta all'esame

In Figura 1 è mostrato lo schema di un motore marino connesso all'elica mediante un riduttore ad ingranaggi ad uno stadio. Noti i momenti di inerzia del volano, del motore, delle ruote dentate e le dimensioni degli alberi (Tabella 1), determinare:

1) frequenze e modi di vibrare torsionali del sistema utilizzando un modello a 3 g.d.l.
2) il momento di inerzia del volano per cui è possibile schematizzare il sistema a 3 g.d.l. con un sistema a 2 g.d.l ottenendo un errore percentuale sulla frequenza naturale relativa al primo modo flessibile inferiore al 5%.
3) frequenze e modi di vibrare torsionali del sistema a 2 g.d.l. così ottenuto.
4) il valore della rotazione dell'elica e del motore per sistema a 2 g.d.l. quando al motore sia applicata la coppia:
$M_m(t) = M_{m0} + 111\cos(2\Omega_{rot}t - 2.014) + 89\cos(4\Omega_{rot}t - 2.007)$
Si consideri un motore di potenza 120kW alla velocità di 3400rpm. Inoltre per il calcolo delle FRF si utilizzi uno smorzamento modale $\zeta = 0.01$. Diagrammare inoltre le FRF con smorzamento modale $\zeta = 0.01$ e senza smorzamento.

NOTE:
-si trascuri l'inerzia degli alberi
-si esprimano le frequenze in Hz
-si esprimano i risultati con 5 cifre significative

Simbolo	Descrizione	Valore	Unità di misura
J_v	Momento di inerzia del volano	9000	$kg\ m^2$
J_m	Momento di inerzia del motore	1000	$kg\ m^2$
J_1	Momento di inerzia della ruota 1	250	$kg\ m^2$
J_2	Momento di inerzia della ruota 2	150	$kg\ m^2$
J_e	Momento di inerzia dell'elica	2000	$kg\ m^2$
G	Modulo di elasticità tangenziale	8.15E10	N/m^2
z_1	Numero di denti ruota 1	40	
z_1	Numero di denti ruota 2	20	

Tabella 1. Valori numerici relativi al motore marino.

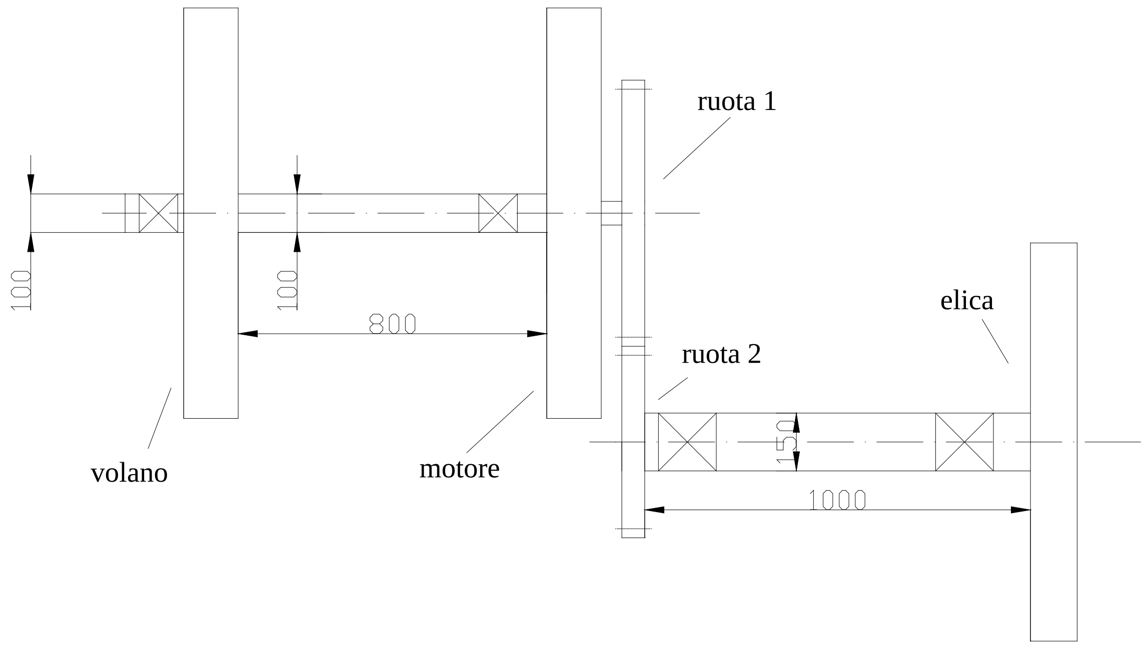


Figura 1. Schema di motore marino (le misure sono espresse in mm).

Procedimento per domanda 1)

Schematizzo il sistema come un modello a 3 g.d.l. torsionali. Siano $\theta_v, \theta_m, \theta_e$ le tre coordinate torsionali indipendenti.

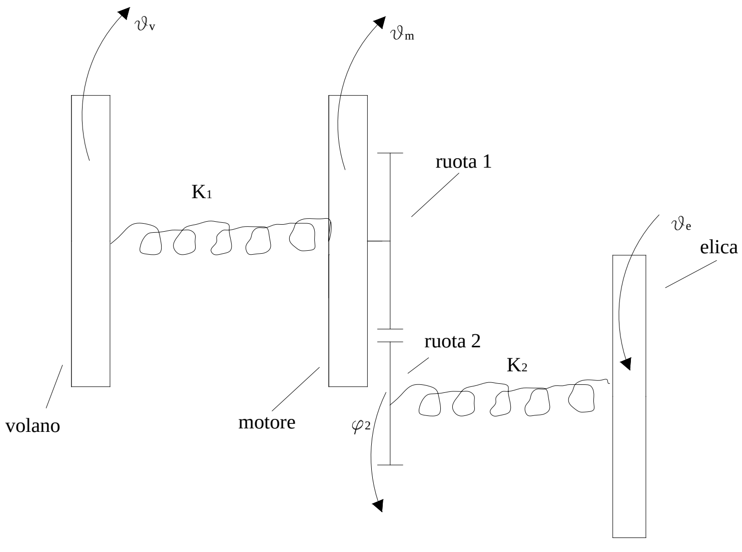


Figura 2. Modello a 3 g.d.l..

In forma matriciale il sistema di equazioni del moto diventa:

$$[J]\{\ddot{\theta}\}+[K]\{\theta\}=\{0\} \text{ con } \qquad \{\theta\}=\begin{Bmatrix}\theta_v\\ \theta_m\\ \theta_e\end{Bmatrix} \tag{1}$$

e $[J]$ e $[K]$ matrici delle inerzie e delle rigidezza:

$$[J]=\begin{pmatrix}J_v & 0 & 0\\ 0 & J_m^* & 0\\ 0 & 0 & J_e\end{pmatrix} \text{ e } [K]=\begin{pmatrix}K_1 & -K_1 & 0\\ -K_1 & K_1+\tau^2K_2 & -\tau K_2\\ 0 & -\tau K_2 & K_2\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Le rigidezze torsionali K_1 e K_2 possono essere stimate mediante l'espressione seguente, riferita ad un generico albero di lunghezza *l*, diametro *d* e modulo elastico tangenziale *G:*

$$K_T=\frac{G\pi d^4}{32l} \tag{3}$$

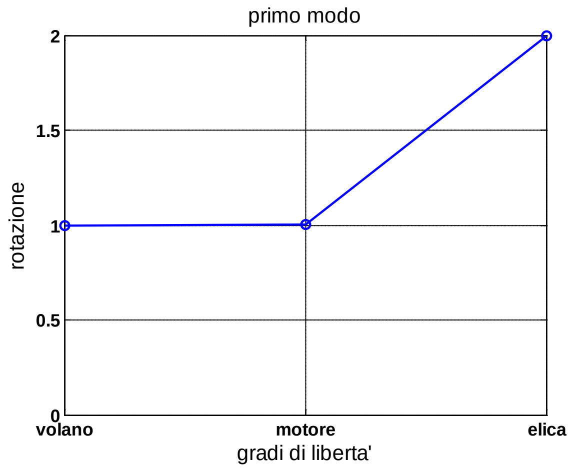
Di seguito alcuni risultati.

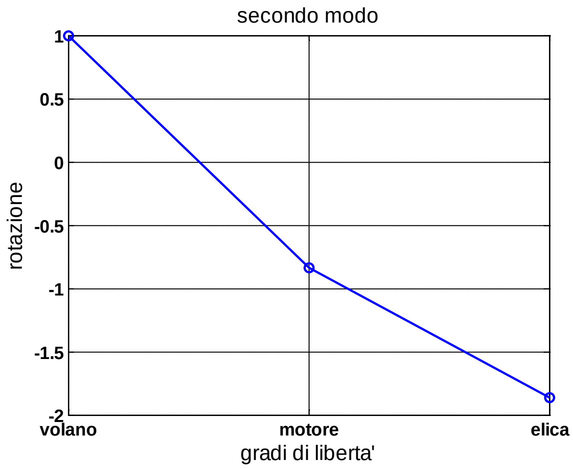
	Frequenza [Hz]
Primo modo	1.9096e-008
Secondo modo	2.274
Terzo modo	16.86

Tabella 2. frequenze naturali in Hz

	Primo modo	**Secondo modo**	**Terzo modo**
θ_v	1	1	1
θ_m	1	-0.8374	-100.0632
θ_e	2	-1.8627	44.0292

Tabella 3. Modi di vibrare normalizzati





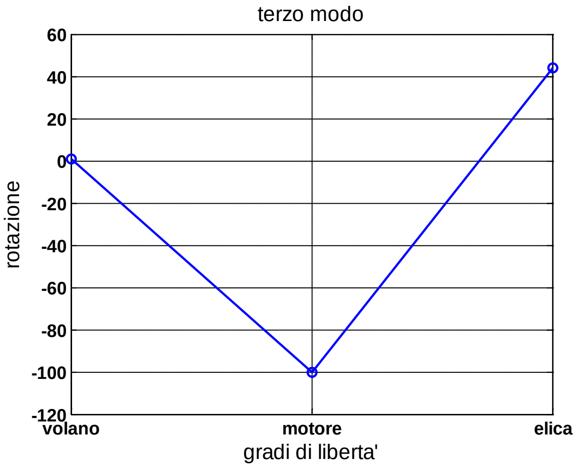


Figura 3. Rappresentazione cartesiana dei modi di vibrare

Procedimento per domanda 2)

Una volta eliminato il volano, il sistema a 3 g.d.l. si modifica in uno a 2 g.d.l.(Figura 4). Le matrici $[J]$ e $[K]$ sono ottenibili dalle espressioni (2) eliminando la riga e la colonna relativa alla coordinata del volano:

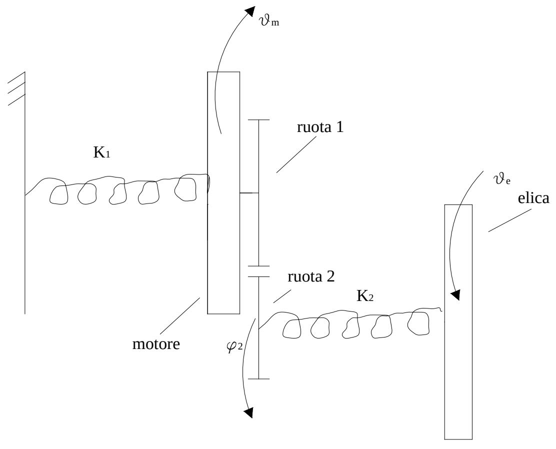


Figura 4. Modello a 2 g.d.l..

Di seguito alcuni risultati.

	Frequenza [Hz]
Primo modo	1.572
Secondo modo	16.86

Tabella 4. frequenze naturali in Hz

	Primo modo	**Secondo modo**
θ_m	1	1
θ_e	2.10	-0.44

Tabella 5. Modi di vibrare normalizzati

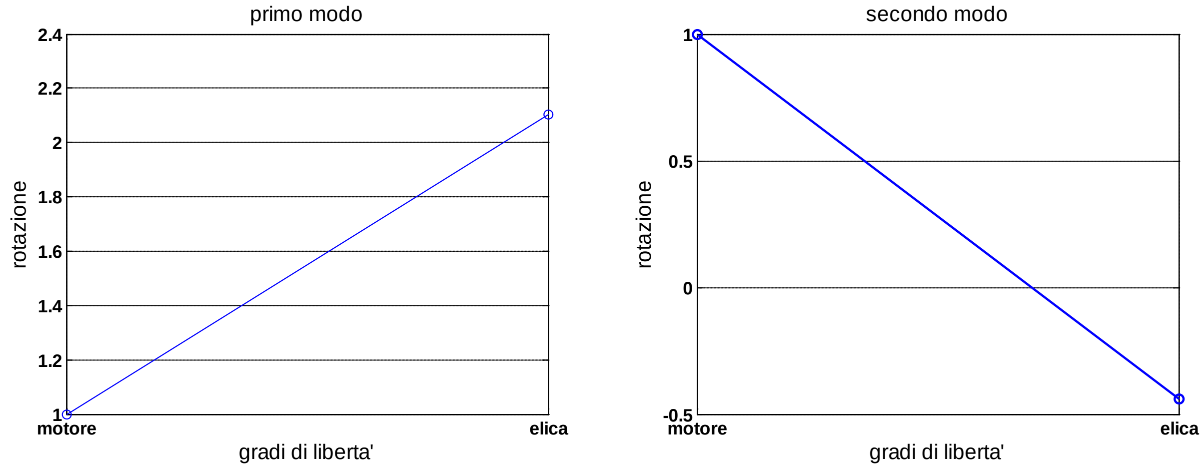


Figura 5. Rappresentazione cartesiana dei modi di vibrare

Procedimento per domanda 4)

Per un sistema a N g.d.l. smorzato la FRF con eccitazione in l e risposta in k assume la seguente forma:

$$H_{kl} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi_{kj}\Phi_{lj}}{k_j - \Omega^2 m_j + i\Omega c_j} \tag{4}$$

dove N rappresenta il numero di modi considerati, K_j, M_j e C_j sono i termini delle matrici rigidezza, massa e smorzamento modale, Ω è la pulsazione naturale e $[\Phi]$ è la matrici dei modi. Dividendo l'espressione (4) per M_j si ottiene un'espressione con i modi normalizzati:

$$H_{kl} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\dfrac{\Phi_{kj}\Phi_{lj}}{\sqrt{m_j}\sqrt{m_j}}}{\dfrac{k_j}{m_j} - \Omega^2 + i\Omega \dfrac{c_j}{m_j}} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\Phi'_{kj}\Phi'_{lj}}{\omega^2{}_j - \Omega^2 + 2i\Omega\omega_j\zeta_j} \tag{5}$$

dove ω_j e ζ_j sono la pulsazione naturale e lo smorzamento modale ed M_j è definito come segue:

$$\sqrt{m_j} = \sqrt{\{\Phi\}_j^T [J] \{\Phi\}_j} \tag{6}$$

Per il sistema a 2 g.d.l. si vuole calcolare la risposta forzata a seguito della coppia $M_m(t)$:

$$\begin{Bmatrix} \theta_m \\ \theta_e \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} H_{mm} & H_{me} \\ H_{em} & H_{ee} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_m \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{7}$$

E' da notare che tutti i termini della (7) sono complessi. I termini H_{mm} e H_{em} sono definiti come segue, in base alla (5):

$$H_{mm} = \frac{\Phi'_{m1}\Phi'_{m1}}{\omega^2{}_1 - \Omega^2 + 2i\Omega\omega_1\zeta_1} + \frac{\Phi'_{m2}\Phi'_{m2}}{\omega^2{}_2 - \Omega^2 + 2i\Omega\omega_2\zeta_2} \tag{8}$$

$$H_{em} = \frac{\Phi'_{e1}\Phi'_{m1}}{\omega^2{}_1 - \Omega^2 + 2i\Omega\omega_1\zeta_1} + \frac{\Phi'_{e2}\Phi'_{m2}}{\omega^2{}_2 - \Omega^2 + 2i\Omega\omega_2\zeta_2} \tag{9}$$

La Figura 6 e Figura 7 mostrano le H_{mm} e H_{em} in termini di ampiezza e fase.

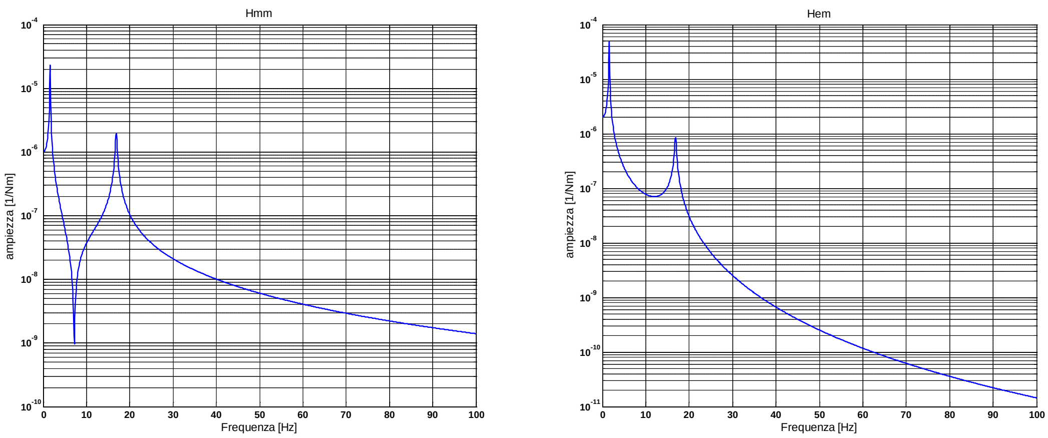


Figura 6. ampiezza delle FRE con smorzamento modale $\zeta = 0.01$.

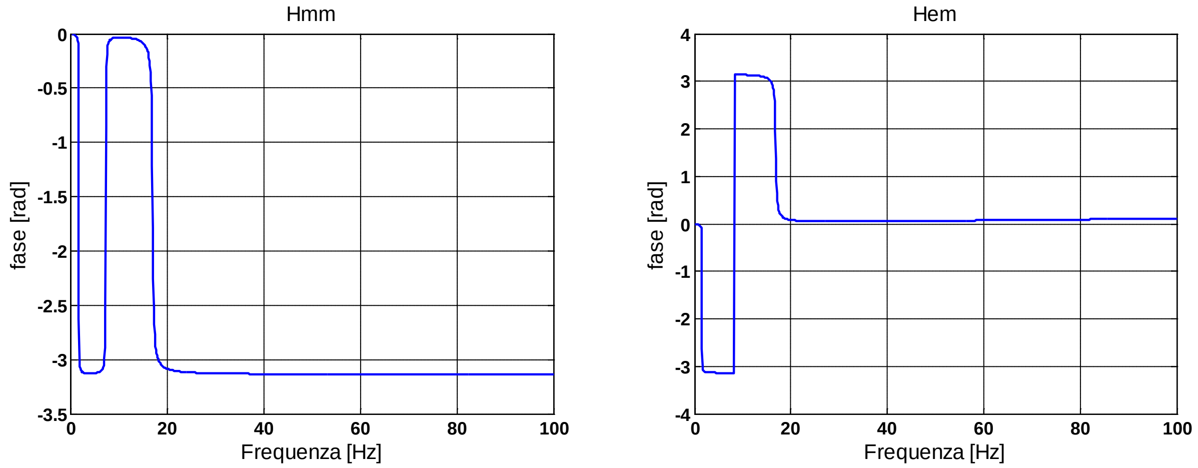


Figura 7. Fase delle FRE con smorzamento modale $\zeta = 0.01$.

Studiamo ora la coppia motrice $M_m(t)$. Alla velocità di 3400 rpm il motore eroga 120 kW, pertanto la coppia motrice costante del motore può essere ottenuta mediante la relazione:

$$M_{m0} = \frac{120kW}{\Omega_{rot}} = 337\,Nm$$

dove $\Omega_{rot} = 2\pi \cdot 3400/60$

In Figura 8 è mostrato il diagramma nel tempo e nel dominio della frequenza della coppia motrice.

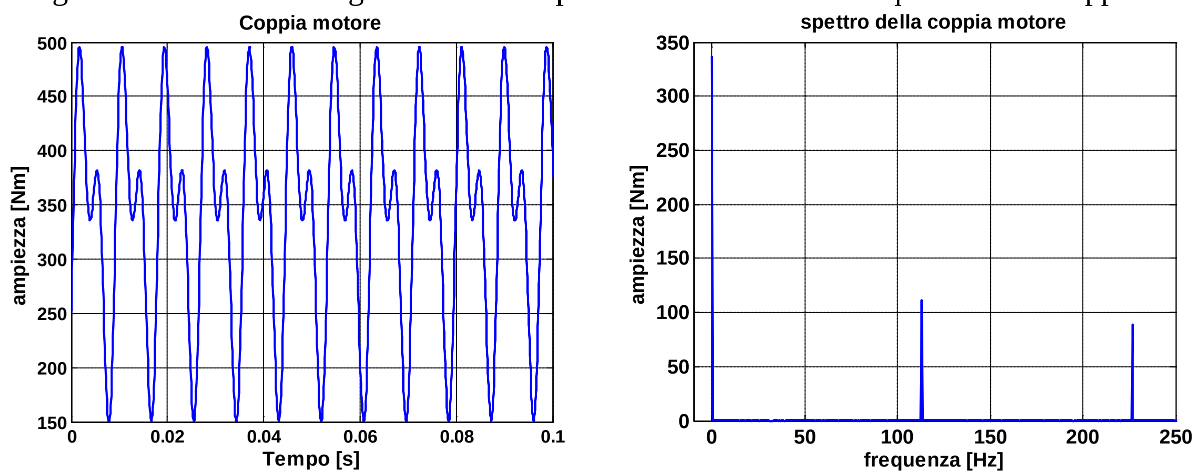


Figura 8. Coppia motore rappresentata nel dominio del tempo e delle frequenze.

L'espressione (7) nel dominio delle frequenze può essere scritta come segue:

$$\theta_m = \left[H_{mm}(2\Omega_{rot}) \cdot M_m(2\Omega_{rot})\right]e^{i2\Omega_{rot}t} + \left[H_{mm}(4\Omega_{rot}) \cdot M_m(4\Omega_{rot})\right]e^{i4\Omega_{rot}t}$$

Oppure

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_m &= \bar{H}_{mm}(2\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(2\Omega_{rot}) + \bar{H}_{mm}(4\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(4\Omega_{rot}) \\ \bar{\theta}_e &= \bar{H}_{em}(2\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(2\Omega_{rot}) + \bar{H}_{em}(4\Omega_{rot}) \cdot \bar{M}_m(4\Omega_{rot})\end{aligned} \qquad (10)$$

dove :

$$\bar{M}_m(2\Omega_{rot}) = 111e^{-i2.014}$$

$$\bar{M}_m(4\Omega_{rot}) = 89e^{-i2.007}$$

Traccia di soluzione della domanda 1) in Matlab

1. **Inizializzo le variabili**

```
%%%DATI
Jv = 9000;
Jm = 1000;
…….
```

2. **definisco le costanti elastiche torsionali**

```
%%%%costanti elastiche
k1 = pi*d1^4*G/(32*l1);
k2 =….
```

3. **definisco le matrici 3X3 massa e rigidezza**
4. **calcolo modi e frequenze naturali**

```
[fi,omegaq] = eig(K,J);
freq_nat=….
```

5. **normalizzo gli auto vettori rispetto al primo valore**

```
for i =1:3,
    finorm(:,i) = fi(:,i)./fi(1,i);
end;
```

6. **grafico dei modi**
   utilizzare il comando "plot"
7. **utilizzare del comando "format short o long o long e" per mostrare il valore delle frequenze naturali con un sufficiente numero di cifre significative.**
8. **utilizzare *edit/axes properties* nella finestra grafica della figura di matlab per modificare la figura**

Traccia di soluzione delle domande 2) e 3) in Matlab

1. **Inizializzo le variabili**
2. **definisco le costanti elastiche torsionali**
3. **definisco le matrici 2X2 massa e rigidezza**
4. **calcolo modi e frequenze naturali**
5. **normalizzo gli auto vettori rispetto al primo valore**
6. **grafico dei modi**

7. **modifico il valore del Jv nel modello a 3 g.d.l. finche la prima frequenza torsionale del modello a 3 g.d.l. e la prima frequenza torsionale del modello a 2 g.d.l. non corrispondono con un errore del 5%**
8. **utilizzare *edit/axes properties* nella finestra grafica della figura di matlab per modificare la figura**

Traccia di soluzione della domanda 4) in Matlab

1. **Inizializzo le variabili (inserire i valori dello smorzamento modale (zita1 e zita2)**
2. **definisco le costanti elastiche torsionali**
3. **definisco le matrici 2X2 massa e rigidezza**
4. **calcolo modi e frequenze naturali**

```
[fi,omegaq] = eig(K,J);
freq_nat=..
omega_nat=..
```

5. **definisco i termini della matrice massa modale (che userò per normalizzare i modi)**

```
M1=fi(:,1)'*J*fi(:,1);
M2=
```

6. **normalizzo i modi con la massa modale**

```
fi_norm(:,1)=fi(:,1)/sqrt(M1);
fi_norm(:,2)=...
```

7. **calcolo delle FRF: Hmm, Hem**

```
dF=0.1;
freq=[0:dF:500];
omega=2*pi*freq;

Hmm=(fi_norm(1,1)^2./(….;   (attenzione all'uso del puntino)
Hme=…
```

8. **grafico delle FRF utilizzando il comando *abs* e *angle* per ottenere ampiezza e fase**
9. **grafico delle FRF con smorzamento modale nullo**
10. **definisco i valori della coppia motrice per l'armonica 2X e 4X e la frequenza di rotazione**

```
Mm_2X=…
Mm_4X=…
```

11. **selezione dalle FRF complesse per il valore corrispondente alla seconda armonica(velocità angolare di 2Xfreq_rot)**

```
 dF=0.1; freq_rot=3400/60;
for k=1:length(freq)
    if freq(k) >= 2*freq_rot-dF & freq(k) <= 2*freq_rot+dF
        Hmm_2X=Hmm(k);
        Hem_2X=Hem(k);
    end
end
```

12. **selezione dalle FRF complesse per il valore corrispondente alla quarta armonica(velocità angolare di 4Xfreq_rot). Usare un indice diverso da "k", ad esempio "j".**
13. **calcolo rotazioni di motore e elica con formule 10**