La risposta a regime risulta del tipo: $x(t) = X_0 \cos(\omega t - \psi)$

con: $$X_0 = \frac{\frac{A}{m}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)+\left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}; \qquad tg\psi = \frac{2\zeta\,\omega/\omega_n}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

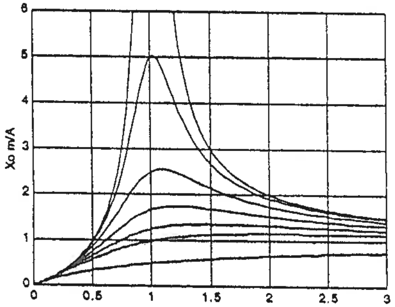

Fig. 4.14 – Ampiezza del rapporto $X_0\, m/A$ in funzione del rapporto $(\omega/\omega_n)^2$ nel caso di oscillazioni forzate con eccitazione sinusoidale di ampiezza proporzionale a ω.

ECCITAZIONE ARMONICA IN RISONANZA (DI FASE)

Si consideri il caso particolare in cui la forza eccitatrice ha pulsazione ω coincidente con la pulsazione naturale ω_n del sistema. In altre parole siamo in condizione di risonanza di fase.

Per il ***sistema non smorzato***, l'equazione del moto è:

$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos\omega_n t$ ovvero: $\ddot{x} + \omega_n^2 x = F_0/m \cos\omega_n t$

L'integrale particolare è: $x_p(t) = X\, t\, \omega_n \sin\omega_n t$ con: $X = \frac{1}{2}\frac{F_0}{k}$

L'integrale generale dell'omogenea associata è del tipo: $x_{go}(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t$

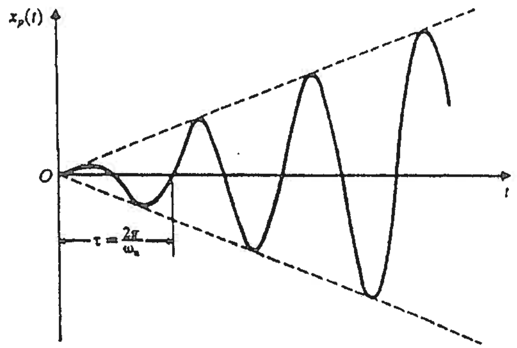

Fig. 4.15 – Risposta del sistema non smorzato all'eccitazione armonica in risonanza.

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa è:

$$x(t) = A_1 \cos\omega_n t + A_2 \sin\omega_n t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{k} t\, \omega_n \sin\omega_n t$$

Introducendo le condizioni iniziali si ha: $$\boxed{x(t) = x_o \cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_o}{\omega_n}\sin\omega_n t + \frac{1}{2}\frac{F_0}{k} t\, \omega_n \sin\omega_n t}$$

Si può osservare che l'integrale particolare dell'equazione completa è una oscillazione di ampiezza che cresce linearmente nel tempo. Il suo andamento è rappresentato in figura 4.15.

Per il ***sistema smorzato***, l'equazione del moto è:

$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega_n t$ ovvero: $\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = F_0/m \cos\omega_n t$

L'integrale particolare è: $x_p(t) = X \sin\omega_n t$ con: $X = \frac{F_0/k}{2\zeta}$

L'integrale generale dell'omogenea associata è del tipo:

$$x_{go}(t) = e^{-\zeta\omega_n t}\{A_1 \cos\omega_s t + A_2 \sin\omega_s t\}$$

in cui, se le condizioni iniziali sono nulle, risulta: $$A_1 = 0 \qquad A_2 = -\frac{F_0/k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa, il cui andamento è riportato in figura 4.16, è:

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0/k}{2\zeta}\left[-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_s t + \sin\omega_n t\right]}$$

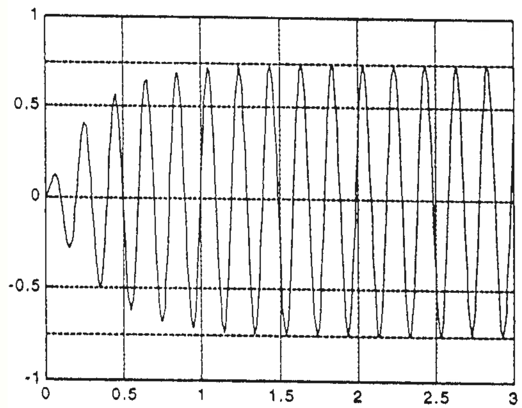

Fig. 4.16 – Risposta del sistema smorzato all'eccitazione armonica in risonanza.