**Problema 36**

La variabile aleatoria $X$ (di Laplace) è definita mediante la densità di probabilità:

$$f_X(x) = Ae^{-|x|} \qquad x, A \in \mathbb{R} \qquad A > 0$$

a) Si calcoli il valore del parametro $A$ affinché $f_X(x)$ sia normalizzata.
b) Si determini la funzione di ripartizione, discutendo la regolarità di tale funzione per $x = 0$.
c) Si calcoli media, moda e mediana di $X$.
d) Si calcoli la varianza, i coefficienti di asimmetria e di curtosi, commentando i valori determinati.

**Problema 37**

Sia $X$ una variabile aleatoria definita dalla densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ \dfrac{c}{x^2} & |x| \geq a \end{cases}$$

dove $a > 0$.

a) Calcolare la costante $c$ affinché $f_X(x)$ sia normalizzata. Disegnare il grafico di $f_X(x)$.
b) Determinare la funzione di ripartizione di $X$. Calcolare media, mode, mediane e varianza di $X$.
c) Sia $\{X\}_n$ una successione di v.a. ottenuta da $X$ ponendo $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$. Dire se la successione è convergente.

**Problema 38**

Sia $X$ una variabile aleatoria definita dalla densità di probabilità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{2x}{\theta} e^{-\frac{x^2}{\theta}} & x > 0 \end{cases}$$

dove $\theta$ è un parametro reale positivo.

a) Calcolare media e moda di $X$.
b) Si consideri ora la variabili aleatoria ottenuta mediante la trasformazione $Y=X^2$. Calcolare la funzione densità di probabilità per $Y$. Dire di che variabile aleatoria si tratta e da quali parametri è caratterizzata.
c) Calcolare la funzione di ripartizione per $Y$.
d) Si consideri infine la trasformazione $Z = e^{-\frac{x^2}{\theta}}$. Di che variabile aleatoria si tratta? Calcolare la funzione densità di probabilità per $Z$. Per quali valori risulta definita?

**Problema 39**

La variabile aleatoria di Cauchy, *X*, è definita dalla seguente densità di probabilità:

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} \qquad x, a \in \mathbb{R} \qquad a > 0$$

a) Verificare che la funzione densità sia correttamente normalizzata.
b) Calcolare media, moda e mediana di tale distribuzione
c) Calcolare la varianza di tale distribuzione

**Problema 40**

Si consideri la variabile aleatoria di Pareto *X*, la cui funzione di ripartizione è:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ 1 - \left(\frac{a}{x}\right)^b & x \geq a \end{cases}$$

con $a \geq 0$ e $b > 0$.

a) Verificare che *F(x)* sia una funzione di ripartizione. Calcolare la densità di probabilità per *X* e graficare qualitativamente i casi *a*=1, *b*=1 e *a*=1, *b*=2.
b) Calcolare media e varianza di *X*. Verificare l'esistenza o meno di tutti i momenti della variabile aleatoria. Esiste la funzione generatrice dei momenti $M_X(t)$?
c) Sia $Y = 1/X$ con $X$ v.a. di Pareto avente *a*=1 e *b*=1. Calcolare la funzione di ripartizione e la densità di probabilità per *Y*. Di che v.a. si tratta?

**Problema 41**

Sia *X* una variabile aleatoria gaussiana di media nulla e varianza $\sigma^2$; sia *Y* una v.a. definita troncando le code della *X*, ossia imponendo che *Y* sia nulla per $|y| \geq a > 0$ e distribuita gaussianamente come la *X* per $|y| < a$.

a) Calcolare la densità di probabilità della v.a. *Y* e verificarne la normalizzazione. [*Suggerimento: esprimere il risultato utilizzando la funzione di ripartizione della v.a. X*]
b) Calcolare media, varianza, mode e mediane di *Y*.
c) Sia $a = n$, $n \in \mathbb{N}$, dire se la successione $Y_n$ tende in distribuzione ad una variabile aleatoria e, se esiste, identificarla. Ripetere il procedimento per la successione definita ponendo $a = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$.

**Problema 42**

Sia $X$ una v.a. discreta ricavata a partire da una v.a. di Poisson con la possibilità che $X$ possa assumere anche valori negativi, la cui distribuzione di probabilità vale:

$$p_X(j) = c\frac{\mu^{|j|}}{|j|!}e^{-\mu}, \qquad \mu > 0, j \in \mathbb{Z}$$

a) Determinare $c$ in modo che sia verificata la condizione di normalizzazione e disegnare qualitativamente l'andamento della distribuzione di probabilità per $\mu = 1$.
b) Calcolare la media, la varianza e la funzione generatrice dei momenti di $X$.
c) Sia data la successione $\{X\}_n$, ottenuta ponendo $\mu = 1/n$; calcolare, se esiste, il limite di tale successione.

**Problema 43**

I transistor della ditta TS hanno un tempo di vita rappresentato da una variabile aleatoria esponenziale ed è noto che ciascun componente dura in media due anni.

a) Calcolare la probabilità che uno di questi transistor funzioni per meno di 18 mesi.
b) Un transistor TS sta funzionando ininterrottamente da due anni. Qual è la probabilità che resista per un altro anno?
c) Vengono collegati in serie tre transistor TS. Qual è la probabilità che questo circuito funzioni per almeno due anni? [*Suggerimento: supporre che le durate dei transistor siano s-indipendenti*]
d) Nel circuito di una macchina industriale è inserito un transistor. Vi è inoltre un dispositivo che, non appena un transistor si rompe, lo sostituisce con uno nuovo fino ad un massimo di 4 sostituzioni. Se tutti gli altri componenti della macchina non sono soggetti a rottura, quanto tempo in media passerà prima che la macchina smetta di funzionare?

**Problema 44**

In un'urna sono contenute $H$ palline (di colore bianco e rosso) di cui $h$ sono bianche. Mediante il metodo dell'estrazione in blocco di estraggono $n$ palline. Il numero di palle bianche estratte è una v.a. ipergeometrica, la cui distribuzione di probabilità è:

$$P_j = \frac{\binom{h}{j}\binom{H-h}{n-j}}{\binom{H}{n}}$$

Si aumenti il numero totale di palline, mantenendo costante la frazione di palline bianche sul totale $p = h/N$ e quindi di quelle rosse $q = (H-h)/N$ con $p + q = 1$. Dire se la variabile "numero di palline bianche estratte su $n$" converge in distribuzione ad una variabile aleatoria nota.

**Problema 45**

Sia $X$ una v.a. uniforme su $(0, a)$ con $a$ incognita e sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale di $X$. Sia $Z$ la v.a.:

$$Z = \max_X \{X_1, \dots, X_n\}$$

a) Determinare la densità di probabilità di $Z$.
b) $Z$ è uno stimatore corretto di $a$?
c) $Z$ è uno stimatore consistente di $a$?

**Problema 46**

Sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale di una v.a. gaussiana $X$ avente parametri $(\mu, \sigma)$ ignoti; la seguente v.a. è uno stimatore di $\mu$:

$$\hat{X} = \frac{X_1}{2} + \frac{1}{2(n-1)} \sum_{j=2}^{n} X_j$$

a) Lo stimatore è corretto?
b) Che tipo di variabile aleatoria è $\hat{X}$?
c) Lo stimatore è consistente?

**Problema 47**

Si traggono indipendentemente tra loro 100 osservazioni di una v.a. esponenziale di parametro incognito $\lambda$. È risultato che 70 tra esse si trovano nell'intervallo [0,6], mentre le rimanenti sono maggiori di 6. Determinare una stima di $\lambda$.

**Problema 48**

Sia $X$ una v.a. gaussiana e sia $(X_1, \dots, X_n)$ un campione casuale di $X$. Determinare con il metodo della massima verosimiglianza, uno stimatore della media e della varianza. Verificarne inoltre la correttezza e consistenza.

**Problema 49**

Per riordinare un archivio si separano i documenti antecedenti all'anno 2000 da quelli successivi. I documenti, in ordine temporale casuale, sono in totale 1000, e vengono esaminati a lotti di 20 alla volta, per un totale di 50 lotti. Il numero dei documenti successivi al 2000 in ogni lotto è una variabili aleatoria con media 7 e varianza 4.

a) Determinare uno stimatore della probabilità $p$ che un documento sia successivo al 2000.
b) Verificare correttezza e consistenza dello stimatore ottenuto. Qual è la varianza di $\hat{p}$?

**Problema 50**

Le misurazioni del diametro di un campione casuale di 200 sferette da cuscinetto, costruite da una macchina in una settimana, mostrano una media di 0.824 cm ed una deviazione standard di 0.042 cm.

a) Calcolare l'intervallo di confidenza al 95% del valore del diametro delle sferette.
b) Come al punto precedente, con un livello di confidenza del 99%.

**Problema 51**

Una equipe di medici vuole misurare il tempo di reazione medio di automobilisti con età compresa tra i 18 e i 50 anni e stima che la deviazione standard di questa sia $\sigma = 0.20$ s.

a) Quanto deve essere grande il campione di misurazioni affinché si sia confidenti al 95% che l'errore nello stimare il tempo di reazione medio non sia superiore a 0.04 s?
b) Ripetere il punto precedente considerando un livello di confidenza pari al 99%.
c) Il metodo utilizzato ai punti precedenti per stimare la grandezza del campione da estrarre presuppone che la popolazione da cui questo viene estratto sia di tipo gaussiano. Non sapendo, a priori, di che tipo di v.a. si tratta, giustificare perché si è potuto procedere in questo modo.

**Problema 52**

Durante il monitoraggio climatico della regione $A$ sono state effettuate, nel mese di luglio, 30 misurazioni della temperatura media mensile (riportate in tabella) in 30 diversi punti rappresentativi dell'intero territorio.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 22.3 | 24.1 | 22.9 | 24.0 | 23.8 | 23.2 |
| 24.9 | 22.6 | 23.3 | 20.9 | 24.0 | 20.3 |
| 25.7 | 24.0 | 25.1 | 25.1 | 25.7 | 24.9 |
| 24.6 | 24.2 | 22.7 | 22.0 | 23.2 | 22.0 |
| 20.9 | 21.6 | 19.9 | 23.2 | 22.3 | 22.7 |

Dai dati in tabella si ricavano la media campionaria $\bar{x} = 23.20$ e la varianza campionaria $s^2 = 2.39$. Si vuole appurare se il campione di misure smentisce il dato storico che assegna il valore $\sigma^2 = 2.00$ alla varianza della temperatura: è possibile affermare che il valore della varianza della temperatura e significativamente maggiore del valore storico?

**Problema 53**

Un campione di 8 pazienti è stato sottoposto ad una nuova terapia. Misurando un certo indice ematico sono stati registrati i differenti valori (prima e dopo la cura) riportati in tabella.

| Paziente | Prima $x_1$ | Dopo $x_2$ | Differenza $y = x_2 - x_1$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 1.00 | 0.34 | -0.66 |
| 2 | 0.69 | 0.62 | -0.07 |
| 3 | 0.76 | 1.20 | 0.44 |
| 4 | 0.99 | 0.82 | -0.17 |
| 5 | 0.77 | 1.03 | 0.26 |
| 6 | 1.24 | 1.48 | 0.24 |
| 7 | 1.06 | 1.24 | 0.18 |
| 8 | 1.19 | 1.11 | -0.08 |

Dai valore in tabella si ricavano la media campionaria delle differenze $\bar{y} = 0.018$ e della varianza campionaria di $Y$, $s^2 = 0.118$.

È possibile affermare che la terapia utilizzata ha prodotto una differenza significativa sul valore dell'indice ematico prima e dopo il trattamento?

**Problema 54**

All'interno di un'azienda si vuole verificare se un incentivo salariale aumenta la produttività. A questo scopo vengono messi a confronto due reparti: il reparto $A$, con $n = 8$ dipendenti, e il reparto $B$, composto da $m = 6$ dipendenti. Le produttività dei due reparti dopo l'esperimento sono riportate in tabella:

| $x_{A,i}$ | $x_{B,j}$ |
|---|---|
| 1.17 | 1.44 |
| 0.94 | 1.54 |
| 1.10 | 0.90 |
| 0.81 | 1.14 |
| 1.05 | 0.91 |
| 0.89 | 1.13 |
| 1.00 | - |
| 0.56 | - |

È possibile affermare che la produttività del reparto $B$ sia significativamente maggiore di quella del reparto $A$?

**Problema 55**

In un laboratorio di certificazione della qualità del prodotto di un'industria di molle viene esaminato un esemplare al fine di determinare la costante elastica $k$. La molla viene sollecitata da pesi diversi ($F$); le lunghezze ($L$) corrispondenti ai diversi pesi sono riportate in tabella.

| $F_j$ ($kg_p$) | $L_j$ (mm) |
|---|---|
| 2 | 42.0 |
| 4 | 48.4 |
| 6 | 51.3 |
| 8 | 56.3 |
| 10 | 58.6 |

a) Determinare la retta di regressione lineare.
b) Calcolare il coefficiente di correlazione campionario discutendo il risultato ottenuto.

**Problema 56**

I cavalli vincitori delle ultime 144 edizioni del Palio di Siena avevano occupato le otto possibili posizioni in partenza con le seguenti frequenze:

| Posizione | Frequenze |
|---|---|
| 1 | 29 |
| 2 | 19 |
| 3 | 18 |
| 4 | 25 |
| 5 | 17 |
| 6 | 10 |
| 7 | 15 |
| 8 | 11 |
| Totale | 144 |

a) Si formuli un'opportuna ipotesi nulla e si esegua il test del $\chi^2$, verificandone la significatività.
b) Si esprima un parere in relazione alla possibile dipendenza dalla posizione del cavallo vincitore. Che certezza abbiamo riguardo questa affermazione?

**Problema 57**

A seguito di una campagna di misurazione di una grandezza fisica, è stato raccolto il seguente insieme di misure sperimentali.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 731 | 772 | 771 | 681 | 722 | 688 | 653 | 757 | 733 | 742 |
| 739 | 780 | 709 | 676 | 760 | 748 | 672 | 687 | 766 | 645 |
| 678 | 748 | 689 | 810 | 805 | 778 | 764 | 753 | 709 | 675 |
| 698 | 770 | 754 | 830 | 725 | 710 | 738 | 638 | 787 | 712 |

a) Raggruppare l'insieme di dati in quattro classi: la prima costituita dai dati inferiori a $\bar{x} - s$, la seconda fra $\bar{x} - s$ e $\bar{x}$, la terza fra $\bar{x}$ e $\bar{x} + s$, la quarta oltre $\bar{x} + s$.
b) Si formuli un'ipotesi ragionevole in relazione alla v.a. che governa la distribuzione dei dati e la si discuta.

**Problema 58**

Si lanciano insieme tre dadi 400 volte e si registra il numero di ⚅ in ciascun tiro con i seguenti conteggi:

| ⚅ | Frequenze |
|---|---|
| 0 | 217 |
| 1 | 148 |
| 2 | 33 |
| 3 | 2 |

a) Formulare un'adeguata ipotesi statistica nulla ed una alternativa finalizzate all'esecuzione del metodo del $\chi^2$, scegliere un opportuno raggruppamento per i dati riportati in tabella e calcolare il valore del $\chi^2$ campionario.
b) Calcolare, sulla base della suddivisione scelta nel punto precedente, il livello di significatività del test del $\chi^2$, discutendo il risultato.

**Problema 59**

Un campione di 25 persone di cui 18 fumatori e 7 non fumatori vengono immersi in un ambiente di fumatori incalliti. Dopo tre mesi di attività lavorativa in quell'ambiente, la situazione diventa la seguente:

| | | *dopo* | |
|---|---|---|---|
| | | fumatore | non fumatore |
| *prima* | fumatore | 4 | 14 |
| | non fumatore | 4 | 3 |

a) Per verificare l'efficacia del trattamento contro il fumo, si esegua il test di Mc Nemar
b) Sulla base dei dati raccolti, si determini il livello di significatività del test.