

Compito di Geometria e Algebra.
Ingegneria dell'Informazione (9 C.F.U.) del 17-01-2012

1) Sia $f : \mathbf{P}_2(x) \rightarrow \mathbf{R}^3$ la funzione lineare definita da

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + b - c, 2a + b - 4c, a + 2b + kc), \quad ax^2 + bx + c \in \mathbf{P}_2(x), \quad k \in \mathbf{R}.$$

a) Per ogni $k \in \mathbf{R}$, Trovare una base e la dimensione di N_f (nucleo di f) e I_f (immagine di f) e stabilire se f è iniettiva o suriettiva.

b) Discutere l'appartenenza di $(1, -1, \alpha)$ ad I_f ($\alpha \in \mathbf{R}$) e di $x^2 + \beta x + \gamma$ a N_f ($\beta, \gamma \in \mathbf{R}$).

2) Discutere i seguenti sistemi lineari ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$):

$$\text{a) } \begin{cases} 2y - 3z = \alpha \\ \alpha x - y + 4z = \beta \\ 2x + 3y - 2z = 2 \end{cases}, \quad \text{b) } \begin{cases} 2y - 3z + \alpha t = 0 \\ \alpha x - y + 4z + \beta t = 0 \\ 2x + 3y - 2z + 2t = 0 \end{cases}$$

3) Sia $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -3 \\ 0 & 5 & \beta \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$). Trovare:

a) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è diagonalizzabile,

b) gli eventuali valori di $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ per i quali A è invertibile e risulta $\det(A^{-1}) < \det(A)$.

4) Sia $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ (A è simmetrica)

a) Diagonalizzare A con una matrice ortogonale U .

b) Trovare gli autovalori e gli autospazi di A^2 senza calcolare esplicitamente A^2 (motivare la risposta).

5) Trovare:

a) le equazioni ridotte della retta r passante per $P(1, 2, 3)$ e parallela alla retta

$$t \equiv \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2x + y - 4z - 2 = 0 \end{cases}$$

b) l'equazione della sfera S di centro $C(1, 2, -1)$ e tangente il piano

$$\pi \equiv 2x + 3y + 6z + 5 = 0,$$

c) le equazioni dei piani tangenti la sfera S (del punto precedente) e paralleli a π .

6) Ridurre a forma canonica e studiare la conica $C \equiv x^2 - y^2 - 4x + 4y - 4 = 0$. Tracciare il grafico di C .

N.B. Tutti i passaggi devono essere opportunamente motivati.